



SEP
SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO



Centro Interdisciplinario de Investigación y

Docencia en Educación Técnica

**Procesamiento de Imágenes Digitales y Fundamentos de Teoría del Color para la
Enseñanza del Álgebra Lineal.**

Tesina para obtener el grado de:

Especialista

en

Aprendizaje y Enseñanza de las Ciencias Básicas.

Presenta:

Pablo Enrique Moreira Galván.

Director de tesina:

Dr. Gustavo Arroyo Delgado.

Querétaro, Qro, México. Enero 2020

Dedicatorias

A mis padres Cruz Moreira y Angelina Galván.

A mis hermanos José, Nayeli y María.

A mi Familia Analy, Leonardo y Santiago.

Agradecimientos

Quiero agradecer al CIIDET por darme la oportunidad que me dio, gracias al él, me ha cambiado la forma de ver la enseñanza.

A los maestros del departamento de Ciencias Básicas, Isaac, Raquel, Alfredo especialmente a los profesores Gustavo, Alberto y Ricardo por la ayuda que me otorgaron, pero sobre todo, por que me soportaron, siempre contestaron todas mis preguntas.

Resumen

Se propuso una manera de desarrollar el tema de Matrices y Transformaciones Lineales referentes a la materia de Álgebra Lineal, la cual es materia obligatoria en todas las escuelas pertenecientes al TecNM.

Se crearon problemas que relacionaron temas de Física y Matemáticas, los cuales ayudarán al estudiante a comprender su entorno, algo recomendado por la UNESCO.

Algo importante es que los estudiantes podrán interactuar con las imágenes en tiempo real con ayuda del software WolframCloud, los estudiantes podrán hacer hipótesis sobre la resolución de los problemas para después comprobar su respuesta, sin la necesidad de hacer cálculos, los cuales son de gran complejidad dado el tamaño de las matrices que representan las imágenes digitales.

Los ejercicios que se propusieron enfatizan el uso de la imaginación, lápiz y papel, puesto que existen diferentes formas de la resolución de los problemas, los cuales no son usuales para un curso tradicional.

Se concientiza el propósito de las materias puesto que se encuentra una transversalidad entre ellas y un uso práctico en la actualidad.

Mediante un método comparativo, se explorará al aprendizaje de los conceptos propuestos en esta tesina.

Abstract

A way was proposed to develop the theme of Matrix and Linear Transformations on the theme of Linear Algebra, which is a compulsory subject in all the schools belonging to the TecNM.

Problems related to Physics and Mathematics issues were created, which will help the student to understand their surroundings, something recommended by UNESCO.

Something important is that students will be able to interact with the images in real time with the help of WolframCloud software, students will be able to formulate hypotheses about problem solving and then verify their response, without the need to make calculations, which are very complex given the size of the matrices that represent the digital images.

The exercises that were proposed emphasize the use of imagination, pencil and paper, since there are different ways to solve problems, which are not common in a traditional course.

The objective of the subjects is made aware as there is a transversality between them and a practical use today.

Through a comparative method, the learning of the concepts proposed in this thesis will be explored.

Índice general

Índice de figuras	IV
1. Introducción	1
1.1. Descripción de la problemática	1
1.2. Justificación del problema	2
1.2.1. Tema 1. Números complejos	2
1.2.2. Tema 2. Matrices y Determinantes	3
1.2.3. Tema 3. Sistemas de ecuaciones lineales	4
1.2.4. Tema 4 Espacios vectoriales	4
1.2.5. Tema 5. Transformaciones lineales	4
1.3. Objetivo general	5
1.3.1. Objetivos específicos	5
1.4. Organización de la tesina	6
2. Fundamentos de color	8
2.1. Teorías de la luz	8
2.2. Corrimiento al rojo	10
2.3. Ojo Humano	11
2.4. Leyes de Grassmann	11
3. Matrices y Determinantes	13
3.1. Historia	13

3.2. Operaciones con matrices.	16
3.2.1. Multiplicación por un escalar.	16
3.2.2. Suma y Resta.	17
3.2.3. Multiplicación.	17
3.2.4. Multiplicación término a término.	18
3.3. Determinantes	18
4. Operaciones con Imágenes	22
4.1. Historia	22
4.2. Imágenes digitales	23
4.3. Imágenes en escala de grises	26
4.3.1. Multiplicación por escalar	26
4.3.2. Suma y Resta	28
4.4. Multiplicación de imágenes	30
4.5. Sistemas de colores	32
4.6. Sistema RGB	32
4.7. Sistema <i>CMY</i> y <i>CMYK</i>	33
4.8. Sistema YUV	34
4.9. Transformaciones en 2D	35
5. Propuesta Didáctica	37
6. Conclusiones	46
A. Tutorial Wolfram	48

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
B. Comandos básicos de Wolfram	52
C. Programas desarrollados	55
D. Ejercicios y Soluciones	56
Bibliografía	70

Índice de figuras

2.1.1. Representación de radiaciones electromagnéticas.	8
2.1.2. Descomposición de la luz blanca.	9
2.1.3. Rango del espectro visible.	10
3.1.1. Cálculo de superficie de un terreno.	13
3.1.2. Libro Nueve capítulos del arte matemática.	14
4.1.1. Hijo de Russel Kirsch.	22
4.2.1. Zoom a imagen para ver 25 píxeles.	23
4.2.2. Escala de grises y su representación matricial.	24
4.2.3. Ejemplo de píxeles a color y su representación matricial.	25
4.2.4. Escala de tonalidad de colores RGB y representación matricial.	25
4.3.1. Félix y su representación matricial.	26
4.3.2. Imagen cuya matriz es de 720×480 píxeles, multiplicada por distintos valores.	28
4.3.3. Suma y suma ponderada de las imágenes (a) y (b).	28
4.3.4. Resta de la imagen (a) con la imagen (b).	29
4.3.5. Hubo movimiento, ya que la imagen resultante de la resta de las imágenes no fue totalmente negra.	29
4.4.1. Efecto de multiplicar Félix por una matriz antidiagonal.	30
4.4.2. Multiplicación por la izquierda, matriz (a) por Félix.	31

4.4.3. Efecto de multiplicar término a término.	31
4.6.1. Representación del sistema RGB.	33
4.7.1. Colores Cyan, Magenta y Amarillo	34
5.0.1. Iglesia	45
5.0.2. Descomposición de colores de la imagen 5.0.1	45

1 Introducción

El Álgebra Lineal es una materia obligada en todas las ingenierías, la cual proporciona al estudiante de ingeniería herramientas para la resolución de problemas que aparecen en su profesión ya que muchos de los problemas de la naturaleza se pueden aproximar o modelar, con ayuda de transformaciones (Friedberg y cols., 2002), las cuales son el principal objeto de estudio de esta materia, con ayuda del Software libre WolframCloud y el Procesamiento de Imágenes, se verá una relación entre la Física y Álgebra lineal, cumpliendo con varias de las metas propuestas por el programa curricular de todas la ingenierías pertenecientes al TecNM.

1.1. Descripción de la problemática

En todas las carreras pertenecientes al TecNM en México es obligatoria la asignatura del Álgebra Lineal clave de la materia ACF-0903. (TecNM, 2016, p. 1)

Whitehead (1965) determina que en los programas de estudio, después de tiempo son portadores inertes de conocimientos, lo cual según el programa , no tiene cabida, ya que Álgebra Lineal aporta al perfil del ingeniero la capacidad para desarrollar un pensamiento lógico, heurístico y algorítmico al modelar fenómenos de naturaleza lineal y resolver problemas. (TecNM, 2016, p. 1-2)

Debemos preguntarnos para que tipo de trabajos queremos que nuestros estudiantes generen, ¿del siglo XIX?, ¿del siglo XX? o ¿del siglo XXI?, estos últimos basados en la innovación y creatividad, la siguiente reflexión es importante en este trabajo, "Enseñamos cosas del siglo XIX, nosotros nacimos en siglo XX, para personas del siglo XX " Pozo (2008). Uno de los principales objetivos de la materia de Álgebra Lineal es resolver problemas de la vida cotidiana (TecNM, 2016, p. 1).

La importancia de la tecnología lo hace notar Artigüe (2013), ya que pone énfasis en la exigencia social cada vez mayor en las competencias matemáticas para abordar las profesiones del futuro orientadas a la programación y el uso de la inteligencia artificial de la misma manera los planes de estudio deben tener el objetivo de adquirir competencias transversales unido al desarrollo de practicas docentes y recursos que estimulen la curiosidad y el interés de los alumnos.

La UNESCO (2010) menciona que el problema con las matemáticas son entre otras :

- Los vínculos con el mundo real son débiles, generalmente demasiado artificiales para ser convincentes.

tes y las aplicaciones son muy estereotipadas.

- Uso de la tecnología es raro.

La revolución digital es irreversible, las nuevas generaciones viven intensamente la omnipresencia de las tecnologías digitales, jóvenes que no han conocido el mundo sin internet y para los cuales las tecnologías digitales son mediadoras de gran parte de sus expectativas. En (UNESCO, 2013) se menciona el hecho que las escuelas se enfrentan a la necesidad de innovar en los métodos pedagógicos si desean convocar y ser inspiradoras para las nuevas generaciones.

Los sistemas escolares se ven enfrentados a la necesidad de una transformación mayor e ineludible de evolucionar, “que servía a una sociedad industrial”, a otra que prepare a la nueva generación, denominada “sociedad del conocimiento”.

El desarrollo que han alcanzado las TIC demanda al sistema educacional una actualización de prácticas y contenidos que sean acordes a la nueva sociedad de la información, la cual implica incorporar las TIC en el aula, algo de suma importancia es, “Los estudiantes deben ser preparados para desempeñarse en trabajos que hoy no existen.”(UNESCO, 2013, p. 15)

1.2. Justificación del problema

La asignatura de Álgebra Lineal se organiza en 5 temas, Números complejos, Matrices y Determinantes, Sistemas de Ecuaciones Lineales, Espacios vectoriales y Transformaciones Lineales, de los cuales el impacto de este trabajo quedará reflejado de manera sobresaliente, en mucha o poca medida, dependiendo de los antecedentes de los integrantes del grupo correspondiente, en los siguientes temas y actividades de aprendizaje del programa de Álgebra Lineal (TecNM, 2016, p. 7-11).

1.2.1. Tema 1. Números complejos

1. **Competencias Específicas:** Utiliza los números complejos, sus representaciones y las operaciones entre ellos para tener una base de conocimiento a utilizar en ecuaciones diferenciales y en diferentes aplicaciones de ingeniería.
2. **Competencias genéricas:** Capacidad de abstracción, análisis y síntesis. Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas. Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente. Capacidad de trabajo en equipo.

3. Actividades de aprendizaje

- a) Buscar en diferentes fuentes y realizar un ensayo sobre el origen del término número imaginario.
- b) Construir una tabla con las potencias de i y reconocer que cualquier potencia de i^n se puede representar como $\pm i$ ó ± 1 .
- c) Graficar un número complejo en la forma rectangular y polar en el mismo plano y generar el triángulo para deducir las fórmulas de transformación entre sus diferentes representaciones.
- d) Utiliza la expansión en serie de potencias de Maclaurin de la exponencial para obtener la fórmula de Euler para convertir una exponencial compleja a la forma polar o a la rectangular.
- e) Resolver ejercicios sobre operaciones de suma, multiplicación y división con complejos, así como las transformaciones en sus diferentes formas. Analizar el teorema de De Moivre y aplicarlo en la solución de ejercicios de potenciación y radicación de números complejos.
- f) Resolver ecuaciones polinómicas que en su solución tengan raíces complejas.
- g) Utilizar TIC para realizar operaciones y graficar números complejos.
- h) Identificar el uso de números complejos en aplicaciones de ingeniería y en otras ramas de las matemáticas y presentarlo frente al grupo.

1.2.2. Tema 2. Matrices y Determinantes

1. **Competencias Específicas:** Utiliza las matrices, sus propiedades, el determinante y operaciones entre ellas, para resolver problemas de aplicación en las diferentes áreas de las matemáticas y de la ingeniería.
2. **Competencias genéricas:** Capacidad de abstracción, análisis y síntesis. Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas. Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente. Capacidad de trabajo en equipo.

3. Actividades de aprendizaje

- a) Identificar a partir de un listado de propuestas cuáles de ellas son matrices cuadradas y cuál es el orden de cada una.
- b) Resolver ejercicios de suma de matrices, multiplicación por un escalar y multiplicación de matrices identificando cuándo se pueden llevar a cabo e identificar el orden de la matriz resultante.
- c) Cálculo de Núcleo y Rango.
- d) Plantear arreglos matriciales sobre problemas de aplicación, resolverlos y presentarlos frente al grupo.
- e) Utilizar TIC para operar matrices, obtener su inversa y el determinante.

1.2.3. Tema 3. Sistemas de ecuaciones lineales

1. **Competencias Específicas:** Resuelve problemas de aplicación en ingeniería sobre sistemas de ecuaciones lineales para interpretar las soluciones y tomar decisiones con base en ellas, utilizando los métodos de Gauss, Gauss Jordan, matriz inversa y regla de Cramer.
2. **Competencias genéricas:** Capacidad de abstracción, análisis y síntesis. Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas. Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente. Capacidad de trabajo en equipo.
3. **Actividades de Aprendizaje**
 - a) Resolver sistemas de ecuaciones lineales por los métodos de Gauss, Gauss-Jordan, matriz inversa y regla de Cramer y analizar sus características.
 - b) Utilizar TIC para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
 - c) Identificar el uso de sistemas de ecuaciones lineales en aplicaciones de ingeniería y en otras ramas de las matemáticas.
 - d) Resolver problemas de aplicación propuestos acordes al perfil e interpretar su solución.

1.2.4. Tema 4 Espacios vectoriales

1. **Competencias Específicas** Comprende la definición de espacio vectorial como una abstracción para relacionarlo con otras áreas de las matemáticas.
2. **Actividades de Aprendizaje**
 - a) Identificar en una lista de ejercicios cuándo es que un conjunto forma una base de un espacio vectorial y encontrar la dimensión.
 - b) Encontrar la matriz de cambio de la base (de transición).
 - c) Utilizar TIC para encontrar las matrices de cambio de base.

1.2.5. Tema 5. Transformaciones lineales

1. **Competencias Específicas** Utiliza la definición de transformación lineal y sus propiedades para representarla matricialmente.
2. **Actividades de Aprendizaje**

- a) Buscar información sobre la definición de transformación lineal y sus propiedades.
- b) Obtener la matriz asociada a una transformación lineal.
- c) Investigar el uso de las transformaciones lineales al área de la ingeniería.
- d) Utilizar TIC para encontrar el núcleo y la imagen de una transformación lineal.

1.3. Objetivo general

Elaborar una propuesta didáctica donde se utilice el Análisis de Imágenes como apoyo para generar una serie de ejercicios de matrices de la asignatura de Álgebra Lineal y los estudiantes puedan elaborar y comprender de manera más sencilla utilizando WolframCloud. Además los alumnos podrán observar una relación entre la Física y las Matemáticas.

1.3.1. Objetivos específicos

- Identificar y justificar la problemática.
- Revisar e identificar los contenidos del curso de Álgebra Lineal en el TecNM.
- Estudio documental de fundamentación del color.
- Estudio documental de matrices y determinantes.
- Estudio documental de operaciones con imágenes.
- Elaboración de propuesta didáctica.
- Revisar e identificar el uso de WolframCloud.

Este trabajo está basado fundamentalmente en el uso de matrices y en poca medida en transformaciones, los ejercicios propuestos fueron hechos de forma tal que satisfacen las necesidades de las actividades de aprendizaje propuestas en el programa de Álgebra Lineal, pero además se utilizarán imágenes representadas con matrices y se aplicarán, en la propuesta didáctica, operaciones con este tipo de matrices usando WolframCloud lo que permitirá visualizar el efecto que tienen dichas operaciones matriciales con las imágenes; por tanto tendrá un impacto relevante en los temas Matrices y Determinantes y las Transformaciones lineales, puesto será lo que más se trabajará mediante los ejercicios que al ser implementadas en WolframCloud se espera que los estudiantes:

- A través de los ejercicios propuestos, aprendan de manera significativa; ya que al visualizar el efecto que tienen las operaciones matriciales en las propias imágenes que representan matrices ayuda a que se reacomode la estructura cognitiva de los estudiantes. Al ir aumentando gradualmente de dificultad de los ejercicios, los cuales necesitan una comprensión profunda para poder resolverlos, se busca que conozcan de manera más amplia y adecuada el concepto de matrices y transformaciones lineales, además de una mejor comprensión de las operaciones que se efectúan con ellas, para poder resolver los ejercicios de manera correcta.
- Se motiven en el estudio de la materia, puesto que entenderán cómo se manipulan algunas imágenes en un entorno digital, ya que con los ejercicios propuestos podrán entender cómo la Física, Matemáticas y Análisis de Imágenes; se relacionan, entenderán cosas tales como el aumentar brillo en una imagen, sólo es una multiplicación de matrices por un escalar, entre otras cosas.
- Por último este trabajo pretende iniciar a los estudiantes al entendimiento de las tecnologías que están a su alrededor, por ejemplo comprenderán que al aumentar el brillo de una imagen, solo es la multiplicación por escalar y mediante ejercicios propuestos podrán entender como las Matemáticas y Física funcionan en las imágenes digitales, además se espera que se haga las preguntas ¿Qué pasa cuando reducimos o aumentamos de tamaño una imagen? ¿Qué pasa cuando giramos 45 grados una imagen? etc, creando curiosidad y un acercamiento hacia las ciencia.

WolframCloud cuya dirección electrónica es <https://www.wolframcloud.com>, es un Software libre, lo único que se necesita es acceso a internet y un correo electrónico para poder usar la mayoría de sus funciones relativas al análisis de imágenes, por eso la importancia de su uso en este trabajo.

1.4. Organización de la tesina

La tesina consta de seis capítulos. El presente capítulo trata de introducir los diferentes conceptos relacionados con el tema del Análisis de Imágenes desde el punto de vista del Álgebra Lineal, específicamente temas como matrices, operaciones con matrices y transformaciones lineales. Se ofrece el objetivo general y lo que se espera que aprendan los estudiantes al entender y aplicar los ejercicios de una propuesta didáctica. En el capítulo dos se exponen los Fundamentos de Color, Teoría de la Luz, anatomía del ojo y las leyes de la mezcla del color de Grassmann. En el capítulo tres empieza con la historia de las matrices y determinantes desde su comienzo en el siglo III A.C hasta el siglo XIX, después vemos las operaciones fundamentales de éstas, además de incluir unas operaciones poco vistas pero importantes en el Análisis de Imágenes. En el capítulo cuatro, vemos la evolución de las imágenes digitales, para terminar con

su representación actual en forma de matrices, en este capítulo se usarán las operaciones definidas en el capítulo anterior, para después ver el efecto de estas operaciones en las imágenes usando diferentes sistemas de colores. En capítulo cinco se muestra la propuesta didáctica, cuyos ejercicios se busco que transiten los temas del programa de Álgebra Lineal. El capítulo seis, se muestran las conclusiones, donde se hace relevante la importancia de las TIC y la relación de Física, Matemáticas y Computación.

2 Fundamentos de color

En este capítulo se abordará la noción de color, empezando por la definición de luz, la historia desde Newton hasta Planck, para después ver la anatomía del ojo, la cual es de suma importancia puesto que la anatomía del ojo es de suma importancia para las leyes de Grassmann.

2.1. Teorías de la luz

Luz.- Radiación que emiten algunos cuerpos por incandescencia o luminiscencia que iluminando a los objetos los hace visibles. (Lee, 2005, p.14)

Hasta principios del siglo XIX fue considerado una corriente de partículas emitidos por una fuente luminosa, esta teoría desarrollada por Isaac Newton en el siglo XVII y mejorada por Max Planck a principios del siglo XIX, según la cual las partículas representan cantidades discretas de energía denominadas fotones, esta teoría es conocida como "*Teoría de partículas de la luz*". Por otra parte; desde el siglo XVII varios científicos como Christian Huygens, Francesco Grimaldi o Thomas Young, evidenciaron mediante diversos experimentos, que la luz era una especie de movimiento ondulatorio de frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación determinada, esta teoría es conocida como "*Teoría ondulatoria de la luz*". En 1873 James Maxwell demostró que la luz era una forma de onda electromagnética de alta frecuencia y predijo que estas ondas deberían tener una velocidad aproximada de 300000km/s .

Las radiaciones electromagnéticas se propagan en forma de dos ondas vectorial acopladas y perpendiculares entre sí, una para el campo eléctrico $\vec{E}$ y otra para el campo magnético $\vec{B}$.

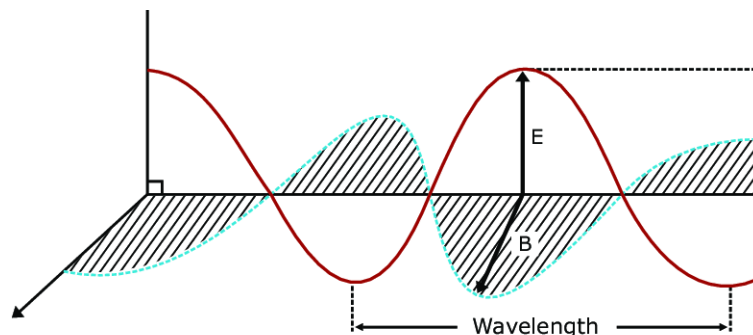


Figura 2.1.1: Representación de radiaciones electromagnéticas.

Fue el propio Isaac Newton quien evidenció cómo la luz blanca se podía descomponer en una serie de haces luminosos, con este experimento Newton halló el espectro de la luz mediante el fenómeno de dispersión

cromática cuya explicación se escapaba a la teoría de partículas de la luz.



Figura 2.1.2: Descomposición de la luz blanca.

Mediante la teoría ondulatoria se sabe que cada color es una onda electromagnética de frecuencia o longitud de onda determinada, si un haz de luz blanca el cual al atravesar el prisma se desvía debido al índice de refracción; el haz luminoso se expande de manera que las radiaciones monocromáticas puedan ser distinguidas.

El ojo humano es sensible a las radiaciones electromagnéticas cuya longitud de onda oscila entre $380nm$ y $780nm$, aunque nuestra tecnología puede detectar longitudes de onda que oscilan $10^{-14}m$ y $10^{15}m$ dentro del rango que es infinito. (Lee, 2005, p. 15)

Einstein (Resnick y cols., 2002) relacionó la energía E del fotón, además le asignó un momento lineal p de la siguiente forma

$$E = hf \tag{2.1}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{2.2}$$

donde h es la constante de Planck, f la frecuencia de onda y λ es la longitud de onda.

En la actualidad se observa a la luz como un fenómeno que posee naturaleza dual (Resnick y cols., 2002), la teoría ondulatoria explica adecuadamente la propagación de la luz y efectos de interferencia y difracción mientras que la teoría de partículas explica el efecto fotoeléctrico y la interacción de la luz con la materia.

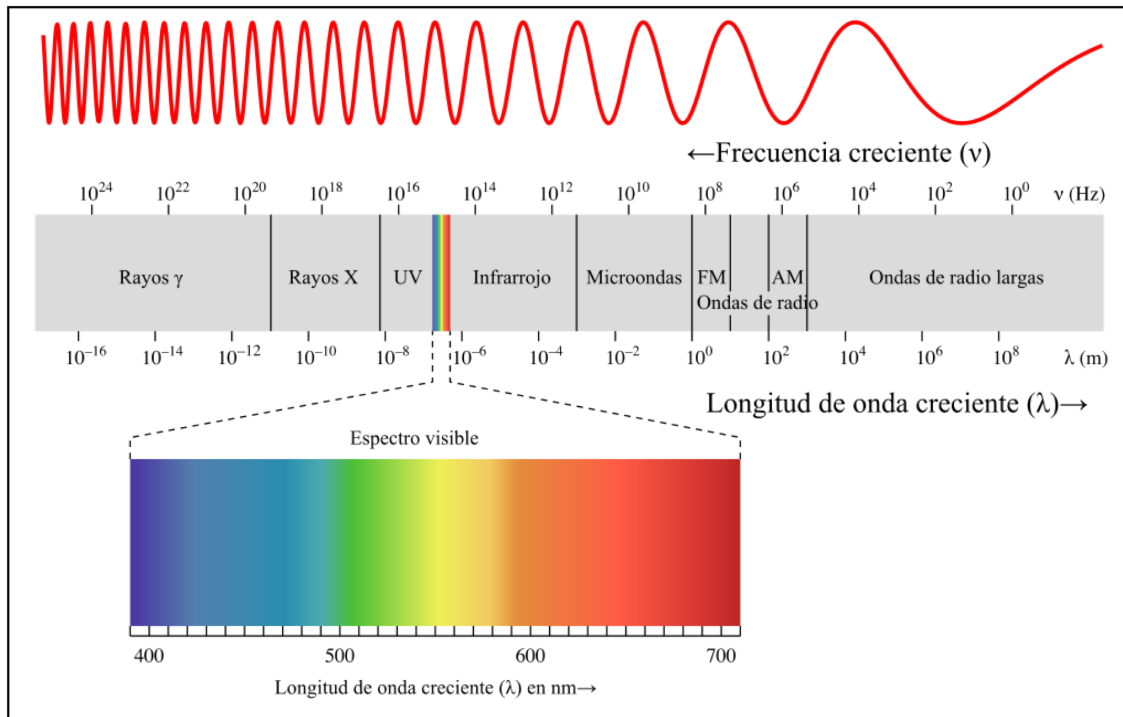


Figura 2.1.3: Rango del espectro visible.

2.2. Corrimiento al rojo

De la ecuación (2.1) y sabiendo que, longitud de onda y frecuencia son inversamente proporcionales, se observa que la energía del fotón es directamente proporcional a su frecuencia y por tanto inversamente proporcional a su longitud de onda.

El corrimiento al rojo es la relación entre la luz emitida por un objeto estelar y la luz de ese mismo objeto que nosotros medimos, la cual es distinta debido a la expansión del universo. (Vega y cols., 2008, p.9)

La teoría del Bing Bang propuesta en 1948 por Georgy Antonovich tiene sus antecedentes en los trabajos de Alexander Friedman y Georges Lemaître, cuya piedra angular se basa en la interpretación del corrimiento al rojo del espectro de las galaxias .

Edwin Poweel Hubble observó (Jiménez y cols., 2011) que en algunas galaxias el corrimiento era mayor que otras, ¿cuál era la causa de este fenómeno?. En 1929 interpretó el corrimiento al rojo como el producto del efecto Doppler de la luz, similar al efecto Doppler del sonido, el cual se presenta de manera cotidiana en la deformación del sonido de una sirena de ambulancia, cuando este se acerca el sonido es más agudo mientras que se aleja el sonido es más grave. Hubble postuló que si la fuente de luz se acerca y en consecuencia su longitud de onda se reduce y en consecuencia tendrá un corrimiento al azul, por el contrario si

la fuente se aleja, la longitud de onda aumenta y la luz tendrá un corrimiento al rojo.

2.3. Ojo Humano

En la retina existen tres tipos de conos conocidos como L (long), M (middle) y S (shorts), los cuales son sensibles a las longitudes de onda largas, medias y cortas, las cuales corresponden a las tonalidades rojas, verdes y azules respectivamente.

En 1801 Thomas Young, partiendo de las observaciones de Newton, publicó una teoría para dar explicación a la percepción del color, con esta teoría se asume que tres imágenes monocromáticas verde, roja y azul, forman una imagen cromática. Por convención se definen las siguientes características para especificar el color. (Lee, 2005, p. 460)

1. **Luminosidad.** Sensación visual según la cual una superficie parece emitir más o menos luz.
2. **Matiz (tono).** Atributo de la sensación visual que corresponde a la denominación de los colores como azul , verde, amarillo etc.
3. **Saturación.** Atributo que permite estimar la proporción de color cromático puro contenido en la sensación visual. Una saturación nula corresponde a una ausencia de color.

2.4. Leyes de Grassmann

Grassmann (Lee, 2005; Zamora, 2002) enunció sus leyes en el siglo XIX, sintetizó la teoría de la mezcla del aditiva del color en cuatro leyes.

Leyes de Grassmann acerca del color

1. Ley trivariancia visual.

Por síntesis aditiva del color es posible conseguir todos los colores percibidos mezclando tres franjas del espectro visible (rojo, verde, azul, siendo la opción más común) , siempre y cuando que ninguno de los tres, pueda obtenerse de los otros dos.

Por ejemplo si usamos el sistema RGB, cualquier color puede ser obtenido como combinación de estos.

$$C = \alpha R + \beta G + \gamma B.$$

2. Ley de aditividad

Al mezclar aditivamente dos radiaciones cualesquiera se forma un color que puede ser generado por síntesis aditiva de los colores primarios.

Sea e_1, e_2, e_3 los colores que forman todo el espectro visible de colores y $C = C_1 + C_2$, $C_1 = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 + \gamma_1 e_3$ y $C_2 = \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2 + \gamma_2 e_3$. Entonces $C = (\alpha_1 + \alpha_2)e_1 + (\beta_1 + \beta_2)e_2 + (\gamma_1 + \gamma_2)e_3$.

3. Ley de proporcionalidad

Siempre que dos superficies produzcan igual sensación cromática es posible variar su luminancia manteniendo constante el matiz y la saturación, sin que varié la igualdad cromática.

Si $C_1 = C_2$. Entonces $kC_1 = kC_2$.

4. Ley de luminiscencia La luminiscencia de un color equivale a la suma de las luminiscencias de sus componentes primarias.

3 Matrices y Determinantes

En esta sección se verá la historia que hay detrás de las matrices que data desde 300 A.C con los babilonios hasta los años 1900 con la ayuda de grandes matemáticos como Gauss, Lagrange, Weierstrass entre otros. Además se verán las operaciones básicas de las matrices y otras no tan conocidas, como la suma ponderada.

3.1. Historia

Se conoce por medio de tablas de arcilla que han sobrevivido, que los Babilónicos estudiaron problemas que llevan a sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo se tiene una tabla de arcilla (ver figura 3.1.1), que data alrededor de 300 A.C dice lo siguiente:

"Hay dos campos cuya área es de 1800 yardas cuadradas. Una produce grano a tasa de $\frac{2}{3}$ de bushel por yarda cuadrada, mientras que la otra produce grano a tasa de $\frac{1}{2}$ de bushel por yarda cuadrada. Si el total de la producción es de 1100 bushel. ¿Cuál es el tamaño de cada campo?"



Figura 3.1.1: Cálculo de superficie de un terreno.

La cultura china fue la primera que planteó sistemas de ecuaciones y su solución, ya que tenían especial interés por los cuadrados mágicos. Se tienen tablas de bambú con una tabla de cálculo con coeficientes de

las incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales, restando filas y columnas. Otra evidencia se encuentra en el libro de *"Nueve capítulos del arte matemática"* (ver figura 3.1.2, donde se plantea la resolución de un sistema de cuatro ecuaciones con cinco incógnitas. Giussepe Cardano en *Ars Magna* (O'Connor y Robertson, 1996), provee una regla para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales, esta regla fue esencial para que Gabriel Cramer desarrollará la fórmula explícita para que un sistema de ecuaciones lineales con tantas incógnitas como ecuaciones tuviera solución única, la cual es conocida como Regla de Cramer. (O'Connor y Robertson, 1996, p.1)

Después de Cardano, el siguiente gran avance se tuvo en la cultura japonesa debido al matemático y samurái Seki Kawa, al que se le da crédito por la invención de los determinantes y la demostración de algunos de sus propiedades, en el libro *Kai Funkundai no Ito* (Método de solución de problemas Funkudai) en 1683 con un proceso llamado **tatmu**. (Juárez y Mendoza, 2016, p.62)



Figura 3.1.2: Libro Nueve capítulos del arte matemática.

En Europa se tiene registro que en 1693 Gottfried Wilhelm Leibniz, escribió una carta a Guillaume François

Antoine marqués de l'Hôpital en la que resolvía el sistema de ecuaciones (Juárez y Mendoza, 2016),

$$10 + 11x + 12y = 0, \quad (3.1)$$

$$20 + 21x + 22y = 0, \quad (3.2)$$

$$30 + 31x + 32y = 0. \quad (3.3)$$

donde describía el sistema de la siguiente manera,

$$1_0 + 1_1 + 1_2 = 0,$$

$$2_0 + 2_1 + 2_2 = 0,$$

$$3_0 + 3_1 + 3_2 = 0.$$

donde el número indica a la ecuación que pertenece y el subíndice, señala el elemento de la ecuación, con las siguientes igualdades,

$$1_0 = 10 \quad 1_1 = 11 \quad 1_2 = 12$$

$$2_0 = 20 \quad 2_1 = 21 \quad 2_2 = 22$$

$$3_0 = 30 \quad 3_1 = 31 \quad 3_2 = 32$$

Además dedujo que tenía solución única ya que

$$10 * 21 * 32 + 11 * 22 * 33 + 12 * 20 * 31 - 30 * 21 * 12 - 31 * 22 * 10 - 22 * 20 * 11 = 0.$$

En 1771 Alexandre-Théophile Vandermonde (Cajori, 2011), realizó la primera exposición lógica y formal de la teoría de determinantes. Describió la matriz cuadrada $V_{n \times m}$ de la siguiente manera:

$$V_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_1^0 & a_2^0 & \dots & a_n^0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{bmatrix}$$

donde los elementos son de la forma $a_{columnas}^{renglones}$.

Algunos matemáticos que participaron en el desarrollo de las matrices y determinantes (O'Connor y Robertson, 1996) fueron, entre otros:

1. Pierre-Simon Laplace en 1772 generalizo el método de Vandermonde para el desarrollo de determinantes por menores.
2. Joseph-Louis de Lagrange en 1773 expuso solución de determinantes de segundo y tercer orden.

3. Carl Friedrich Gauss en 1801 introdujo la palabra *determinante*.
4. Jacques Philippe Binet en 1812 expuso el teorema de multiplicación de determinantes.
5. James Joseph Sylvester en 1850 introdujo el término de *matriz*, el definió la matriz como una disposición oblonga de términos”.
6. Eisentein, Frobenius, Jordan, Cayley, Weierstrass también contribuyeron al desarrollo del tema.

3.2. Operaciones con matrices.

Definición.- (Friedberg y cols., 2002) Una matriz A es un arreglo bidimensional de elementos ordenados en m – filas y n – columnas, se representa de la siguiente manera:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Donde el elemento a_{ij} de una matriz A de tamaño $m \times n$, indica que se encuentra en la i – ésima fila y en la columna j – ésima, donde $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. de manera simbólica denotamos la matriz A como $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

3.2.1. Multiplicación por un escalar.

Sea A una matriz de $m \times n$ y $c \in \mathbb{R}$, se define la multiplicación por escalar cA como sigue:

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

3.2.2. Suma y Resta.

Sean A y B matrices con la misma dimensión, es decir con mismo número de columnas y filas, se define la suma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

De manera similar la resta $A - B$, se define como sigue:

$$\begin{aligned}
 A - B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m1} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.2.3. Multiplicación.

Sean $A_{m \times n}$ y $B_{n \times p}$ matrices tal que el número de columnas de A es igual al número de filas de B . Entonces el producto $A_{m \times n} \times B_{n \times p}$ es una matriz $C_{m \times p}$ cuyo elemento c_{ij} es obtenido multiplicando i -ésima fila de A por j -ésima columna de B , como sigue:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kp} \tag{3.7}$$

Así tenemos que $A \times B$ se obtiene como sigue:

$$A \times B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

donde c_{ij} , están dados por la fórmula (3.7).

3.2.4. Multiplicación término a término.

Aunque no es muy común definir la multiplicación de dos matrices término a término, resulta útil en ciertas ocasiones definirla de esa manera.

Sean $A_{m \times n}$ y $B_{m \times n}$ matrices con el mismo numero de filas y columnas. Entonces el producto $A \odot B$ es una matriz $C_{m \times n}$ cuyo elemento $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ (Caridade y cols., s.f.). Lo cual se representa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 A \odot B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{1,2} & \dots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \dots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix} \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

3.3. Determinantes

Una de los principales usos del determinante es resolver un sistema de ecuaciones de $n \times n$ y poder calcular inversa de matrices cuadradas cuando existe. Para abordar el tema de determinantes, usaremos la definición dada por Lang (2000).

Definición. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz de 2×2 . Entonces se define el determinante de A denotado como $\det A$, mediante

$$\det A := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Para $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, matriz de 3×3 se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde A_{ij} es la matriz obtenida de A quitando la i -ésima fila y la j -ésima columna, a la relación (3.10), se conoce como expansión por la primera fila.

De manera inductiva se define el determinante para una matriz cuadrada de $n \times n$ como

$$\det A := \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} \quad (3.11)$$

Teorema. (Lang, 2000) Los determinantes satisfacen la regla de expansión acorde a columnas y filas.

Ejemplos.

Consideremos la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ y notemos que tiene dos ceros en la segunda columna por lo que, será mas sencillo calcular el determinante expandiendo por esta columna,

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+2}(0) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(2) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}(0) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} \\ &= (2) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} \\ &= -42 \end{aligned}$$

Consideremos la siguiente matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, como tiene un cero en la primera columna o se-

gunda fila, vamos a desarrollarla por la segunda fila .

$$\begin{aligned}
 \det B &= (-1)^{2+1}(0) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(3) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (3) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 3(-6) + (-2) \\
 &= -20
 \end{aligned}$$

Teorema (Regla de Cramer) Sean $A^1, \dots, A^n$ vectores columna tal que $\det(A^1, \dots, A^n) \neq 0$ y B un vector columna. Si existen numeros $x_1, \dots, x_n$ tal que

$$x_1 A^1 + \dots x_n A^n = B$$

Entonces

$$x_j = \frac{\det(A^1, \dots, B, \dots, A^n)}{\det(A^1, \dots, A^n)} \quad (3.12)$$

donde B reemplaza la columna j .

Ejemplo Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$3x + 2y + 4z = 1$$

$$2x - y + z = 0$$

$$x + 2y + 3z = 1$$

En este ejemplo $A^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, utilizando la fórmula (3.12)

tenemos que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}.$$

Haciendo los cálculos obtenemos que $x = \frac{-1}{5}$, $y = 0$, $z = \frac{2}{5}$.

Teorema (Inversa de una matriz). Sea A una matriz de $n \times n$, con $\det A \neq 0$. Entonces existe $A^{-1} = \text{Transpuesta}(b_{ij})$ donde

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det A_{ji}}{\det A}. \quad (3.13)$$

4 Operaciones con Imágenes

El álgebra lineal estudia espacios vectoriales y transformaciones lineales entre estos, es conocido que las transformaciones lineales entre espacios vectoriales, pueden ser representadas como matrices (Friedberg y cols., 2002), mientras que el análisis de imágenes estudia las operaciones de imágenes mediante computadora, las imágenes a estudiar pueden originarse de la captación de cualquier área del espectro electromagnético (rayos X, gamma, por ejemplo) (Cuevas y cols., 2010), la primera pregunta natural sería ¿Cuál es la conexión entre estas áreas?

En este capítulo se verá cómo se utilizan las operaciones, definidas en la sección 3.2, con las imágenes las cuales sabemos que son matrices. Esto nos ayudará a saber y comprender la relación que guardan dichas operaciones con su aplicación en las imágenes digitales que representan matrices. Lo cual nos ayudará a comprender la aplicación de dichas operaciones y entender la relación entre estas dos áreas aparentemente sin relación alguna.

4.1. Historia

Una de las primeras aplicaciones de las imágenes digitales se dio en la industria del periódico (Vilet, 2005), cuando se enviaron imágenes a través de cable submarino entre Londres y Nueva York, en la década de los veinte, conocido como el sistema Bartlane, este sistema tardaba cerca de 3 horas y constaba de equipo de impresión que codificaba las fotografías, para su envío por cable y las reconstruía del otro lado.

Aunque la primera imagen digital (ver figura 4.1.1), basada en ceros y unos se debe a Rusell Kirsch en 1957 (*Fiftieth Anniversary of First Digital Image Marked*, s.f.), cuya resolución fue de 176×176 píxeles.



Figura 4.1.1: Hijo de Russel Kirsch.

En este trabajo, lo importante es el sistema de color que se use ya sea escala a grises, RGB, CMYK, etc, no importa el tipo de extensión que éstas tengan sean jpg, gif, tif, etc.

4.2. Imágenes digitales

Definición.- Una imagen digital es una matriz donde cada entrada se le denomina *píxel* (Allali, 2010).

Dependiendo del tipo de imagen cada píxel puede variar de $2^8 = 256$ valores a escala de grises que utiliza 8 bit por píxel, el cual es el mas común, o $2^{16} = 65536$ que utiliza 16 bits por píxel.

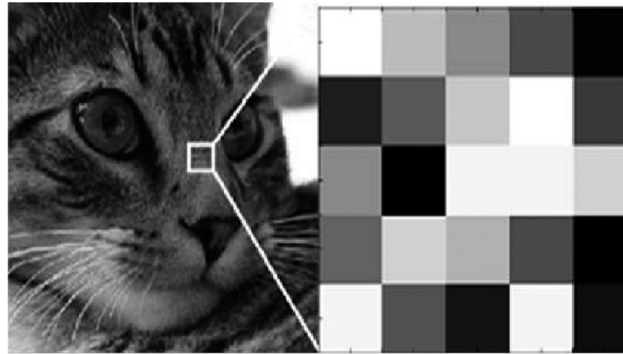
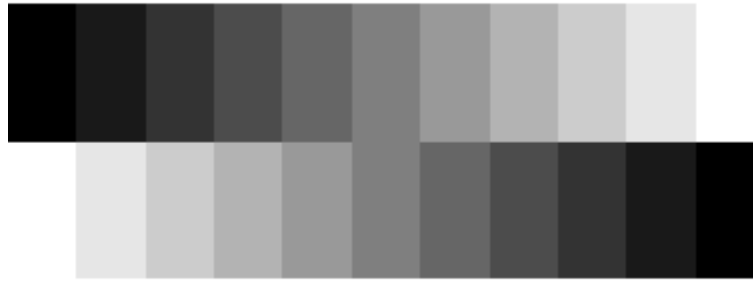


Figura 4.2.1: Zoom a imagen para ver 25 píxeles.

La siguiente matriz muestra la representación de los 25 píxeles que se muestran en la imagen 4.2.1.

$$\begin{pmatrix} \frac{243}{256} & \frac{195}{256} & \frac{157}{256} & \frac{103}{256} & \frac{7}{128} \\ \frac{59}{256} & \frac{29}{64} & \frac{101}{128} & \frac{239}{256} & \frac{45}{128} \\ \frac{155}{256} & \frac{1}{64} & \frac{235}{256} & \frac{117}{128} & \frac{13}{16} \\ \frac{31}{64} & \frac{105}{128} & \frac{47}{64} & \frac{105}{256} & \frac{1}{128} \\ \frac{57}{64} & \frac{113}{256} & \frac{45}{256} & \frac{57}{64} & \frac{35}{256} \end{pmatrix}$$

En este trabajo el valor de cada píxel toma valores en el intervalo $[0, 1]$ (aunque dependiendo del programa utilizado este intervalo puede variar), en la escala de grises 0 representa el negro y 1 el blanco, entre estos se encuentra la escala de grises (Elizondo, 2002).



$$\begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 \\ 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 4.2.2: Escala de grises y su representación matricial.

En imágenes de color, cada imagen es combinación de otras matrices, por ejemplo en el sistema RGB (Red, Blue, Green), así cada color puede obtener mediante combinación de estos (Zamora, 2002). En la cuadro 4.2.1 se explica la combinación necesaria para poder obtener los colores, por ejemplo para obtener amarillo se necesita combinar rojo con verde.

Color	Red	Green	Blue	Representación matricial
Rojo	1	0	0	$((1,0,0))$
Verde	0	1	0	$((0,1,0))$
Azul	0	0	1	$((0,0,1))$
Blanco	1	1	1	$((1,1,1))$
Amarillo	1	1	0	$((1,1,0))$
Negro	0	0	0	$((0,0,0))$

Cuadro 4.2.1: Combinación en el sistema *RGB*, para obtener algunos colores.

Así una imagen a colores es una matriz cuyas entradas a_{ij} son matrices de 3×1 , por ejemplo, en la imagen 4.2.3 se muestra la matriz que representa la imagen y en 4.2.4 se muestra una gama de tonalidades de los colores primarios y su representación matricial.

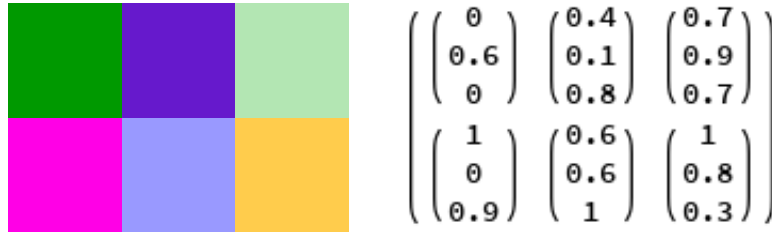


Figura 4.2.3: Ejemplo de píxeles a color y su representación matricial.

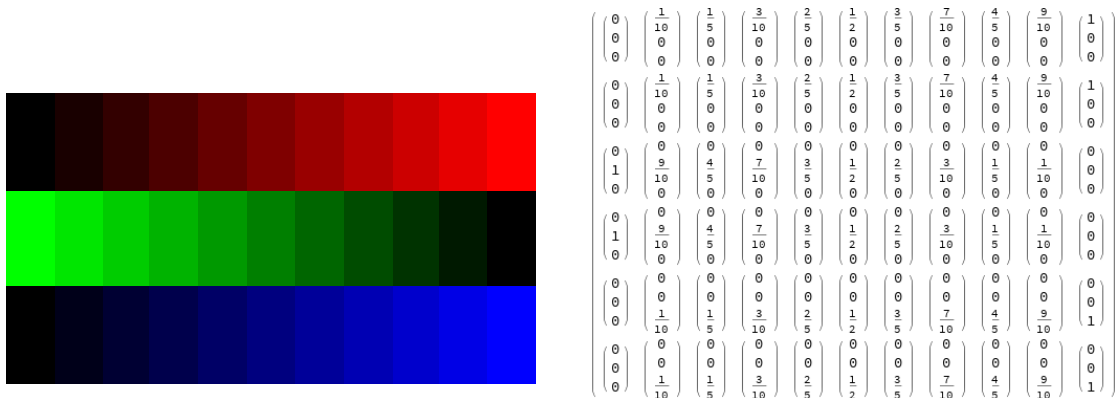


Figura 4.2.4: Escala de tonalidad de colores RGB y representación matricial.

Observación En álgebra lineal se tiene la siguiente definición Friedberg y cols. (2002).

Definición. Un conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vectores en $\mathbb{R}^n$ se llama base de si todo elemento de dicho espacio vectorial se puede expresar como una combinación lineal de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ en una y sólo una forma.

Entonces identificando el espectro visible con $\mathbb{R}^3$, se tiene la siguiente interpretación de las leyes de Grassman:

- La primera ley de Grassman, la ley de trivariancia, nos dice que el espacio de colores tiene base con tres elementos,
- La ley de aditividad se identifica con la suma usual de vectores en $\mathbb{R}^3$,
- La ley de proporcionalidad es la multiplicación de un escalar por un vector,

mientras que la cuarta ley, la ley de luminiscencia en ciertas condiciones es verdadera pero falla de manera marcada cuando se mezclan rojo y verde (Marks, 1974), por ejemplo, la luminiscencia Lum de un color

$C = \alpha R + \beta G + \gamma B$ en el sistema RGB se define Zamora (2002):

$$Lum(C) = \frac{\max(\alpha, \beta, \gamma) + \min(\alpha, \beta, \gamma)}{2}$$

el cual claramente es un valor entre 0 y 1, pero si calculamos la luminiscencia del color blanco vemos que

$$1 = Lum(Blanco) \neq Lum(Rojo) + Lum(Azul) + Lum(Verde) = \frac{3}{2}.$$

4.3. Imágenes en escala de grises

Como se vio anteriormente que las imágenes a escala de grises, la matriz que los representa es una matriz cuyas entradas son números reales que están entre 0 y 1. Vamos a trabajar con Félix, definido en una matriz como sigue:

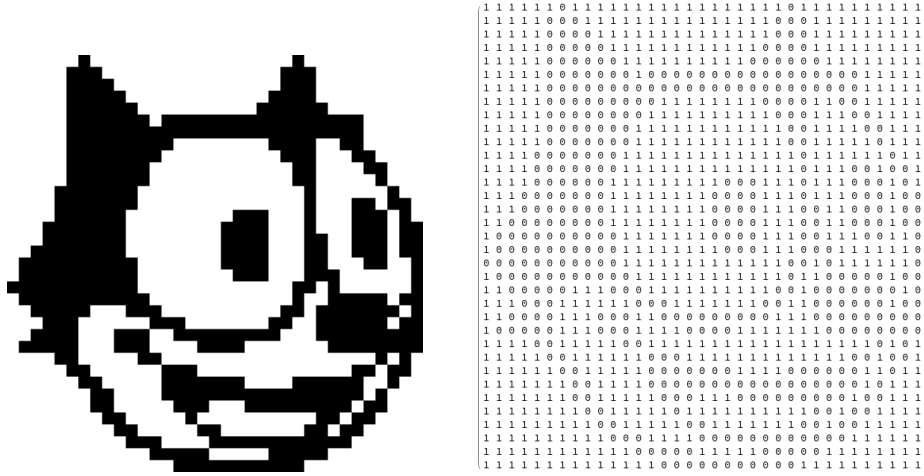


Figura 4.3.1: Félix y su representación matricial.

4.3.1. Multiplicación por escalar

Consideramos $c \in \mathbb{R}^+$. Entonces la multiplicación por escalar afectará a Félix de la siguiente manera (Allali, 2010):

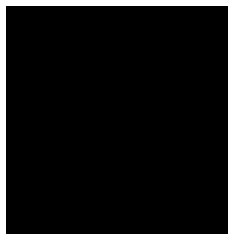
1. Si $c \in (0, 1)$. Entonces lo opacará, ya que cada componente a_{ij} , disminuirá su valor.

(a) $c=.6$

2. Si $c > 1$. Entonces lo iluminará, ya que cada componente a_{ij} aumentará su valor.

(b) $c=10$

3. Si $c = 0$. Entonces Félix, se transformará en una imagen totalmente negra.

(c) $c=0$

4. Si $c = 1$. Entonces Félix quedará igual.

(d) $c=0$

Observación.- Las componentes que sean cero (negro), al multiplicarlas por un escalar quedarán igual (negro), no hay manera de iluminarlas con la multiplicación por un escalar, y las componentes que sean 1 (blanco), cuando se multiplican por un escalar $c \geq 1$ quedaran de la misma tonalidad (blanco) , no hay

manera de iluminarlas más, solo de opacarlas.

A continuación se muestra una imagen a la cual se ha multiplicado por diferentes valores y como esto la afecta.

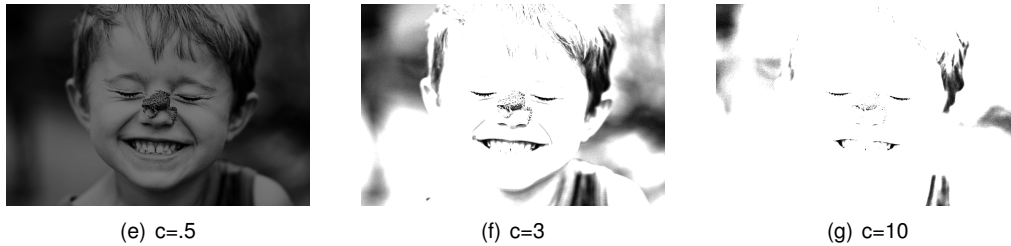


Figura 4.3.2: Imagen cuya matriz es de 720×480 píxeles, multiplicada por distintos valores.

4.3.2. Suma y Resta

Para la suma y resta de imágenes debemos tener algo de cuidado, ya que como las entradas están entre de 0 y 1, puede resultar que al realizar la suma, algunas entradas pueden ser mayores a 1, por lo que se pueden definir dos tipos de sumas la suma ponderada y la suma normal (Ortíz, 2013). A continuación se muestran las diferencias entre estos dos tipos de sumas:

1. Suma normal. Sean A y B , dos imágenes del mismo rango. Entonces la suma $A + B$ es como la definida en (3.5).
2. Suma ponderada. Sean A y B , dos imágenes de misma dimensiones. Entonces la suma ponderada $A \oplus B = \frac{1}{2}(A + B)$

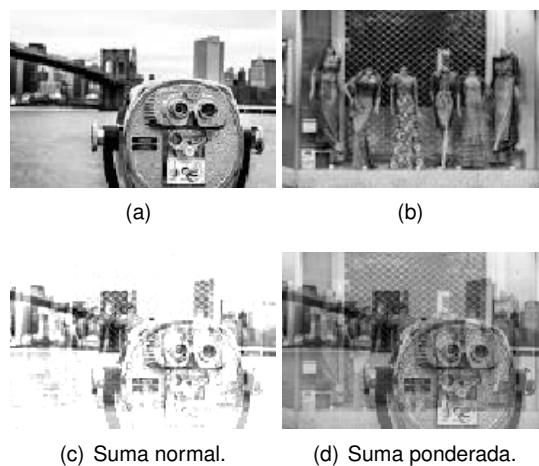


Figura 4.3.3: Suma y suma ponderada de las imágenes (a) y (b).

La resta de dos imágenes se define igual que la fórmula (3.6), lo importante son las aplicaciones de ésta.

1. Negativo de una imagen (N) (Caridade y cols., s.f.). Una imagen negativa es una inversión total, en la que las áreas claras aparecen oscuras y viceversa. Los negativos de película generalmente tienen menos contraste, pero un rango dinámico más amplio, que las imágenes positivas impresas finales. El contraste suele aumentar cuando se imprimen en papel fotográfico. Cuando se introducen imágenes de película negativa en el reino digital, su contraste puede ajustarse en el momento del escaneo o, más generalmente, durante el procesamiento posterior. Entonces a cada elemento a_{ij} de la matriz A , lo necesitamos cambiar por elemento $b_{ij} = 1 - a_{ij}$, con esto se logra que los elementos con menos luminosidad sean los más luminosos y viceversa.

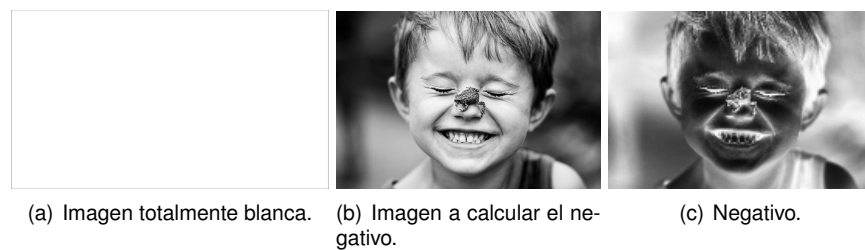


Figura 4.3.4: Resta de la imagen (a) con la imagen (b).

2. Detectar movimiento. Si queremos saber si hubo movimiento, debemos tener una imagen de referencia y compararla con otra ya transcurrido tiempo, si al hacer la resta no resulta la matriz cero. Entonces significa ha habido movimiento. (Urgellés, 2010, p.127)



Figura 4.3.5: Hubo movimiento, ya que la imagen resultante de la resta de las imágenes no fue totalmente negra.

4.4. Multiplicación de imágenes

Igual que con la suma de imágenes se debe tener cuidado con el resultado de la multiplicación ya que cada entrada puede ser mayor a 1 o menor que 0, con lo cual, esos píxeles van a ser blancos o negros respectivamente.

1. Multiplicación. La multiplicación de dos imágenes es tal como se definió en (3.8), con esta operación se puede hacer cosas como hacer un efecto espejo o deslizar filas como se muestran en las figuras 4.4.1 y 4.4.2 respectivamente.

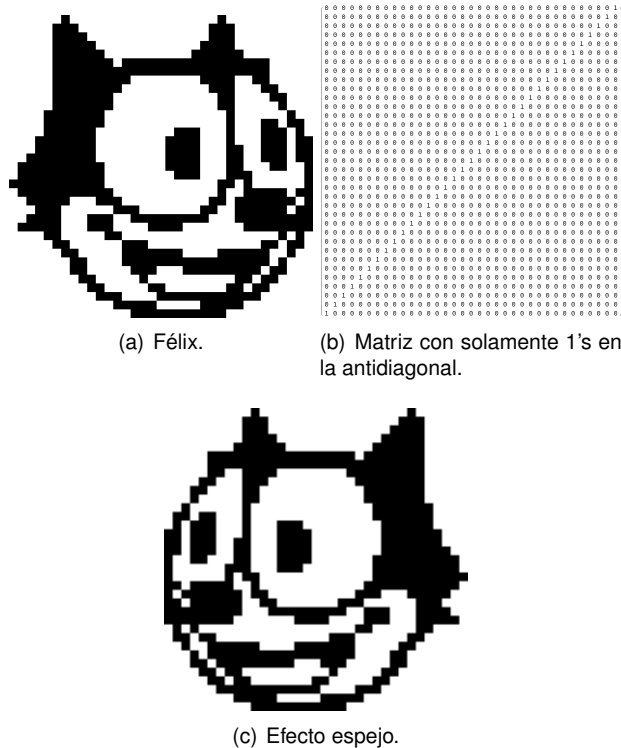


Figura 4.4.1: Efecto de multiplicar Félix por una matriz anti-diagonal.

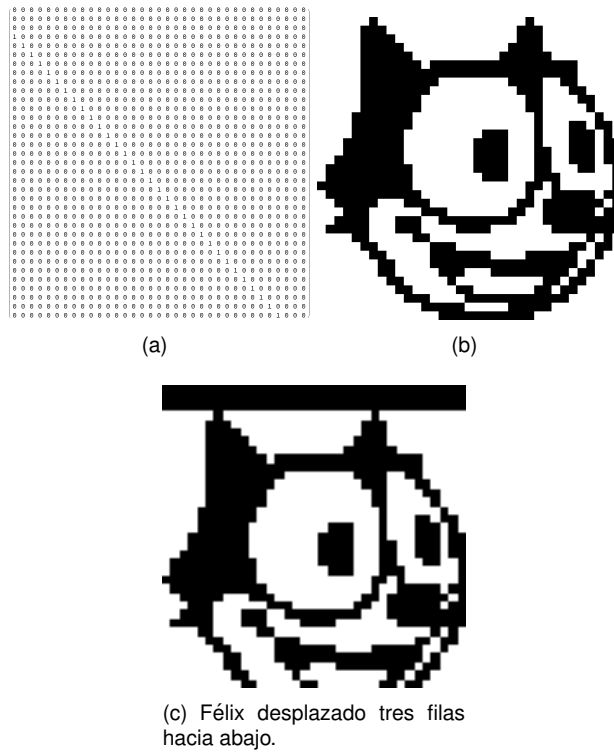


Figura 4.4.2: Multiplicación por la izquierda, matriz (a) por Félix.

2. Multiplicación término a término. Con este tipo de multiplicaciones se puede dar énfasis en partes de una fotografía (Caridade y cols., s.f.).



Figura 4.4.3: Efecto de multiplicar término a término.

En este caso la matriz para dar énfasis fue de 480×720 donde $a_{ij} = 1$ para $70 < i < 150$ y $100 < j < 600$ y los demás coeficientes son 0.

Dependiendo de lo que se pide a realizar sobre una imagen, se puede hacer de diferentes maneras, lo cual implica un conocimiento adecuado de las operaciones por ejemplo si se pide realizar lo siguiente a Félix:



Por ejemplo, este problema se puede resolver mediante multiplicación o resta de matrices.

4.5. Sistemas de colores

Dependiendo de uso de las imágenes ya sea en televisión o imprenta, es el uso del sistema de colores que usa (Cuevas y cols., 2010), en este trabajo veremos solamente *RGB*, *CYM* y el *YUV*.

4.6. Sistema RGB

El modelo de color *RGB*, se basa en la combinación de los colores primarios Rojo (Red), Verde (Green) y Azul (Blue), este es un sistema aditivo (Mejía, 2005), es decir, se basa en la adición de los componentes individuales para generar los colores. Este sistema es ampliamente usado en la televisión y cámaras digitales. Este modelo RGB, forman un cubo con vértices en Rojo, Verde y Azul, como se muestra en la figura 4.6.1, el negro K está en el origen $(0, 0, 0)$, el color blanco W se encuentra en el vértice $(1, 1, 1)$ y la escala a grises está en la línea que une al negro con el blanco.

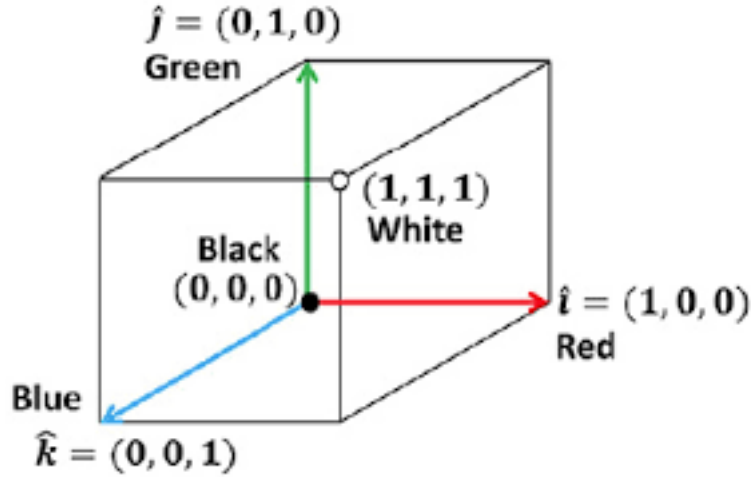


Figura 4.6.1: Representación del sistema RGB.

4.7. Sistema *CMY* y *CMYK*

El modelo *CMY* y *CMYK*, son espacios de colores ampliamente usados en la industria del color, ya que la impresión sobre papel se utiliza un modelo sustractivo a diferencia del sistema *RGB*, en el cual la superposición reduce la intensidad de la luz reflejada. Para llevar este proceso son necesarios los colores Cyan (C), Magenta (M) y Amarillo (Y) (Zamora, 2002).

Este sistema se obtiene bajo la transformación afín del sistema *RGB* (Cuevas y cols., 2010) mediante la transformación:

$$\begin{aligned}
 T_1 : [0, 1]_{RGB}^3 &\mapsto [0, 1]_{CMY}^3 \\
 (x, y, z) &\mapsto (1, 1, 1) - (x, y, z) \\
 &= (1 - x, 1 - y, 1 - z)
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

La base de *CMY* esta constituida por $\{T_1(R), T_1(G), T_1(B)\} = \{C, M, Y\}$, así en este espacio, los vectores $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ corresponden al color Cyan, Magenta y Amarillo respectivamente. Con esta combinación sustractiva se tiene $T_1(0, 0, 0) = W$ y $T_1(1, 1, 1) = K$. Este sistema es importante demuestra que la luz reflejada por una superficie amarilla no contiene luz azul, una superficie magenta puro no refleja luz verde y la cyan la luz roja.



Figura 4.7.1: Colores Cyan, Magenta y Amarillo

Para una mejor cobertura del espacio CMY en la práctica se incorpora el color negro K ,

$$K : [0, 1]_{CMY}^3 \mapsto [0, 1]$$

$$(x, y, z) \mapsto k := \min(x, y, z)$$

El sistema $CMYK$ se obtiene con la siguiente transformación del espacio CMY .

$$T_2 : [0, 1]_{CMY}^3 \mapsto [0, 1]_{CMYK}^4$$

$$(x, y, z, k) \mapsto \begin{cases} (0, 0, 0, 1) & k = 1, \\ \left(\frac{x-k}{1-k}, \frac{y-k}{1-k}, \frac{z-k}{1-k}, k \right) & k < 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

4.8. Sistema YUV

Este modelo representa la base para la codificación de color de la televisión en sistemas de América y Europa (Cuevas y cols., 2010).

Para hacer la conversión del sistema RGB al YUV primero se define la componente de luminancia l como sigue:

$$L : [0, 1]_{RGB}^3 \mapsto [0, 1]$$

$$(x, y, z) \mapsto l := .299x + .587y + .114z \quad (4.3)$$

Por ejemplo $L(Rojo) = .299$, $L(Green) = .587$ y $L(Blue) = .114$.

La transformación entre RGB y YUV viene dada por

$$\begin{aligned} T_3 : [0, 1]_{RGB}^3 &\mapsto [0, 1] \times [-.5, .5] \times [-.5, .5] \\ (x, y, z) &\mapsto (l, .492(z - l), .877(x - l)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Para calcular, por ejemplo $T_3(W) = T_3(1, 1, 1)$ primero debemos calcular su luminancia, la cual es $l = 1$, después calcular los valores $z - l$ y $x - l$, los cuales son cero. Por tanto $T_3(W) = (1, 0, 0)$.

4.9. Transformaciones en 2D

Las operaciones vistas en la sección 3.2, mantienen inalterable la geometría de la imagen, es decir solo cambiar el valor del píxel, mediante operaciones geométricas se pueden cambiar la geometría de las imágenes, operaciones como traslación, rotación, etc, son muy utilizadas en la actualidad.

Cada píxel tiene determinada una posición en el plano (x, y) y un valor asociado al color α , así que fundamentalmente estas transformaciones son de la forma :

$$\begin{aligned} I : \mathbb{R}^2 \times C &\mapsto \mathbb{R}^2 \times C' \\ (x, y, \alpha) &\mapsto (x', y', \alpha') \end{aligned}$$

donde C, C' son espacios de colores. Así, este tipos de transformaciones cambian el color y la posición de cada píxel.

El problema principal con este tipo de transformaciones es que los valores de los píxeles están en un conjunto discreto en $\mathbb{R}^2$, por lo cual, por ejemplo un desplazamiento de un píxel, en general, no corresponderá al valor real dada por la transformación, este problema se puede solucionar por medio de una interpolación, la cual queda fuera de este trabajo, por lo cual se recomienda al interesado leer Cuevas y cols. (2010), Elizondo (2002), Vilet (2005), Ortíz (2013) y Mejía (2005). Aquí solo se verán transformaciones sencillas, las cuales no se implementaran en Wolframcloud, por los motivos ya descritos.

1. **Desplazamiento.** Dado el píxel (x, y) queremos mandarlo al (x', y') , mediante un vector de desplazamiento (d_x, d_y) . La transformación viene dada por:

$$\begin{aligned} I_1 : \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + d_x, y + d_y) \end{aligned}$$

2. **Inclinación.** Permite inclinar el espacio ocupado por un arreglo rectangular, la cual esta dada por:

$$I_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x + b_x y, y + b_y x)$$

3. **Escalamiento.** Permite aumentar el espacio ocupado en el arreglo, mediante un factor (s_x, s_y) , en la dirección x, y respectivamente, la transformación es:

$$I_3 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (xs_x, ys_y)$$

4. **Rotación.** Permite rotar la imagen en un ángulo θ , la transformación viene dada por:

$$I_4 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x \cos \theta + y \sin \theta, y \cos \theta - x \sin \theta)$$

Estas son las transformaciones mas sencillas, pero existen mas complicadas como *Twir*, *Ripple*, *Distorsión esférica*, etc (Cuevas y cols., 2010), las cuales salen del estudio de este trabajo.

5 Propuesta Didáctica

En esta sección se proponen ejercicios, que ayudaran al estudiante a repasar y comprender los temas desarrollados en la secciones anteriores.

Nota En todos los ejercicios se pedirá a los alumnos que entreguen una hoja donde describan el procedimiento que usaron para poder resolver el problema, en caso de no poder resolverlo se les pedirá que indiquen en donde tuvieron dificultades.

Ejercicio 1

Objetivo. El estudiante comprenderá que, aunque la suma y resta de matrices es conmutativa, la resta de imágenes no lo es, mediante ejemplos específicos que desarrollará en WolframCloud, así verá las modificaciones de las matemáticas para su uso en las imágenes digitales.

Tipo de Conocimiento. Nuevo.

Actividad.

1. Tomar dos imágenes distintas A y B y calcular lo siguiente:
 - a) $A + B$
 - b) $B + A$
 - c) $A - B$
 - d) $B - A$
2. En base al inciso anterior, ¿Cuál operación podría ser conmutativa?
3. ¿Qué condiciones deben cumplir las imágenes, para que la suma y resta sean conmutativas?

Ejercicio 2

Objetivo. El estudiante reconocerá de manera visual la no conmutatividad de la multiplicación usual y la conmutatividad de la multiplicación término a término, así se esperará que el alumno sea cuidadoso en la aplicación de estas operaciones, las cuales son muy usadas en las imágenes digitales.

Tipo de Conocimiento Refuerzo de multiplicación de matrices.

Actividad

1. Considerar la E = matriz con 1's en la antidiagonal de tamaño 35×35 y calcular lo siguiente:

- a) $E \times \text{Félix}$
- b) $\text{Félix} \times E$
- c) $E \odot \text{Félix}$
- d) $\text{Félix} \odot E$

2. ¿Cuál de las operaciones puede ser conmutativa? Demostrarlo.

Ejercicio 3

Objetivo. El estudiante reconocerá visualmente la traspuesta de una matriz, calculando la traspuesta de Félix en WolframCloud, así podrá ver que esta operación es muy usada en las imágenes digitales.

Tipo de Conocimiento. Refuerzo.

Actividad. La traspuesta de una matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ se define de como sigue:

$$A^t = [a_{ji}]_{n \times m} \quad 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m.$$

1. ¿Cuál imagen corresponde a la traspuesta de Félix?



2. Calcular $(A^t)^t$

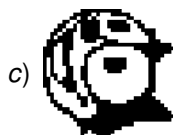
Ejercicio 4

Objetivo. El estudiante reforzará el uso de las operaciones básicas de matrices usando WolframCloud, verá la importancia del orden adecuado para aplicarlas, además usará los conocimientos de los ejercicios previos, con esto se espera el mejor comprensión de las matrices y sus operaciones.

Tipo de Conocimiento. Refuerzo.

Actividad.

1. Determinar la secuencia de operaciones $(+, \times, ^t, E)$, que se deben aplicar a cada Félix, para obtener:



2. Definimos $N[imagen]$ como la función que calcula el negativo de un imagen. Calcular

a) $N^{2018}[imagen]$

b) $N^{2017}[imagen]$

c) Dar una expresión general para $N^n[imagen]$, $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 5

Objetivo. El estudiante mediante ejemplos que realizará en WolframCloud comprenderá como funciona la multiplicación por escalar en las imágenes, además se espera que note las diferencias entre la multiplicación por un escalar en imágenes y matrices, con lo cual concebirá como las operaciones matemáticas se modifican para el uso en de las imágenes.

Tipo de Conocimiento. Nuevo y refuerzo.

Actividad. Buscar una imagen A y elegir números arbitrarios $\alpha \neq 0, \beta$. Calcular lo siguiente

1. $\beta(\alpha A)$

2. $\frac{1}{\alpha}(\alpha A)$

3. $(\alpha\beta) A$

4. Hacer los incisos anteriores con números α, β grandes.

5. ¿La multiplicación por escalar es asociativa?

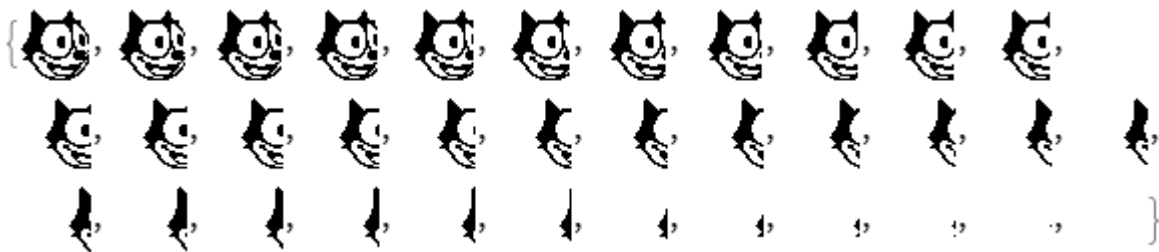
6. ¿Se puede encontrar un número α tal que αA , sea una imagen en blanco? ¿bajo que condiciones se puede encontrar respuesta afirmativa de la pregunta anterior?

Ejercicio 6

Objetivo. El alumno determinará la matriz necesaria para hacer lo que se pide, se espera que el alumno determine la matriz haciendo un ejemplo en una matriz de 3×3 , que después generalizará, con lo cual se esperará que el alumno comprenda mejor la multiplicación de matrices.

Tipo de Conocimiento. Refuerzo.

Actividad. Determinar la matriz que haga que Félix se desplace una columna a la vez, como se muestra en la figura siguiente.



Ejercicio 7

Objetivo. El alumno determinará la matriz necesaria para hacer lo que se pide, se espera que el alumno determine la matriz haciendo un ejemplo en una matriz de 3×3 , que después generalizará y lo implementará en WolframCloud, así verá la importancia del orden de multiplicación en las matrices.

Tipo de Conocimiento. Refuerzo de multiplicación y suma de matrices.

Actividad. Encontrar las matrices y determinar las operaciones necesarias para obtener un desplazamiento vertical de una fila de Félix, como se muestra en la figura.



Ejercicio 8

Objetivo. Se espera que el alumno con ayuda de los ejercicios anteriores pueda hacer una secuencia de operaciones para resolverlo, con lo cual se espera que el alumno terminará dominando las operaciones de

suma y multiplicación de matrices.

Tipo de Conocimiento. Refuerzo de multiplicación y suma de matrices.

Actividad. Determinar sumas y multiplicación de matrices, para obtener que la mitad de arriba de Félix, se pase a la mitad de abajo y viceversa como se muestra en la figura.



Ejercicio 9

Objetivo. El alumno entenderá la importancia de usar diferentes bases para $\mathbb{R}^3$ y mediante el ejercicios se dará cuenta que, en la práctica se usan de manera frecuente transformaciones no lineales.

Tipo de Conocimiento. Refuerzo.

Actividad. Responder y justificar las siguientes preguntas

1. Demostrar que el sistema CMY es linealmente independiente.
2. ¿Es la transformación T_1 definido por (4.1), lineal?
3. ¿Existe una transformación lineal entre el espacio RGB y el CMY ?
4. Encontrar T_1^{-1} .

Ejercicio 10

Objetivo. El alumno entenderá la importancia de usar diferentes transformaciones no lineales y no inyectivas, las cuales se presentan de manera frecuente en la industria.

Tipo de Conocimiento. Refuerzo.

Actividad. Responder justificadamente las preguntas

1. ¿La transformación T_2 definida en (4.2) es lineal?
2. ¿La transformación T_2 es inyectiva?

3. Encontrar T_2^{-1} .

Ejercicio 11

Objetivo. Se espera que el alumno use el teorema de la dimensión para la resolución de este problema, con lo que verá una aplicación de este teorema en la práctica.

Tipo de Conocimiento. Refuerzo.

Actividad.

1. ¿Existen transformaciones lineales inyectivas de $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$?
2. ¿Existen transformaciones lineales inyectivas de $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$?

Ejercicio 12

Objetivo. El alumno determinará la linealidad e invertibilidad de la transformación, con lo que se espera que el alumno vea la importancia de las transformaciones y de diferentes bases, con ejemplos sacados de la industria.

Tipo de Conocimiento. Refuerzo

Actividad. Responder y justificar las respuestas a las siguientes preguntas

1. ¿La transformación T_4 entre RGB y YUV es lineal?
2. Encontrar la matriz de cambio de base entre el espacio RGB y YUV .
3. Encontrar T_3^{-1}

Ejercicio 13

Objetivo. El alumno usará la composición de transformaciones para la resolución de este problema se espera que el alumno note la relación entre las materias de cálculo diferencial y álgebra lineal.

Tipo de Conocimiento. Refuerzo

Actividad. Encontrar una transformación entre el espacio YUV y

1. CMY

Esta matriz representa a Félix en color rojo, como se muestra en la siguiente figura:



Encontrar matriz necesaria para que al multiplicarla nos de



Ejercicio 15

Objetivo. Con ayuda del ejercicio anterior el alumno comprenderá una de las posibles aplicaciones de considerar los escalares ahora como matrices, para después implementarlo en WolframCloud, se espera que el alumno plantee otras posibles aplicaciones en la industria.

Tipo de Conocimiento. Nuevo.

Actividad. Encontrar matrices y el procedimiento para encontrar la descomposición de colores rojo, verde y azul (como se muestra en 5.0.2) de la figura siguiente 5.0.1

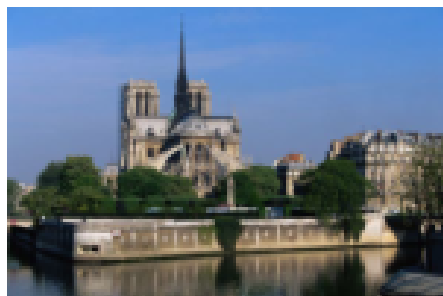


Figura 5.0.1: Iglesia

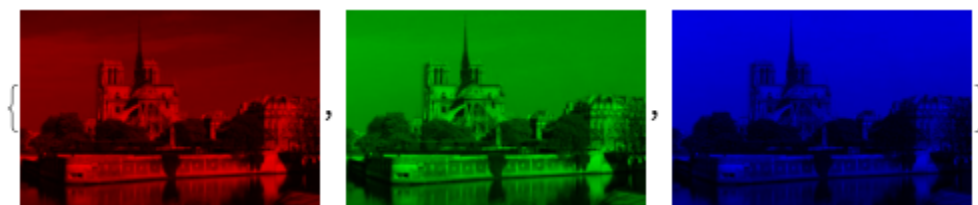


Figura 5.0.2: Descomposición de colores de la imagen 5.0.1

Las respuestas (una de las posibles) de estos ejercicios que necesitaban usar herramientas de WolframCloud se resolvieron y da la explicación de lo hecho, éstas se encuentran de manera pública en un notebook de WolframCloud en la siguiente dirección electrónica:

<https://www.wolframcloud.com/obj/elmamila/Published/solucion.nb>

6 Conclusiones

Se hizo la fundamentación matemática en la que se basa el Análisis de Imágenes, además de hacer una propuesta didáctica de 15 ejercicios nuevos, que dependiendo de la habilidad del docente, pueden ser una guía para el desarrollo de más ejercicios, se dio pauta para la utilización de más operaciones matemáticas y su implementación de manera semejante a la de éste trabajo el cual dependiendo de la carrera se pueden utilizar *Transformada de Fourier, Gradiente, Convolución, Teoría de Conjuntos* (Allali, 2010),(Cuevas y cols., 2010),(Mejía, 2005) por ejemplo , ampliamente utilizados en la sociedad actual en cosas como detección de rostros, filtrado de ruido en las imágenes, compresión de imágenes, entre otros , así se cumple una de las observaciones de la UNESCO (2010), creando aplicaciones “tangible” y de fácil manipulación con el software *WolframCloud*, además de ser una forma *innovadora* de la enseñanza de las operaciones básicas de las matrices, cumpliendo así lo pedido por UNESCO 2013.

Por otra parte se cumple lo demandado por parte del TecNM en la materia de Álgebra Lineal de manera amplia en lo referente:

- Utilizar matrices y operaciones entre ellas.
- Aplicación en diferentes áreas (Física y Computación).
- Resolver ejercicios de suma de matrices multiplicación por un escalar y multiplicación de matrices.
- Uso de TIC para operar matrices.
- Comprende la definición de espacio vectorial y lo relaciona con otras áreas de las matemáticas.
- Transformaciones lineales .
- Investigar el uso de las transformaciones lineales en el área de ingeniería.

Por último este trabajo pretende iniciar a la nueva generación al entendimiento de las tecnologías que están a su alrededor, comprenden que al aumentar el brillo de una imagen, solo es la multiplicación por escalar, pretendiendo que se haga las preguntas ¿que pasa cuando aumentamos una imagen? ¿qué pasa cuando giramos 45 grados una imagen? etc, creando curiosidad y un acercamiento hacia las ciencia.

Adicionalmente mediante WolframCloud se hizo público en la siguiente dirección electrónica los ejercicios propuestos

<https://www.wolframcloud.com/obj/elmamila/Published/Practicas.nb>

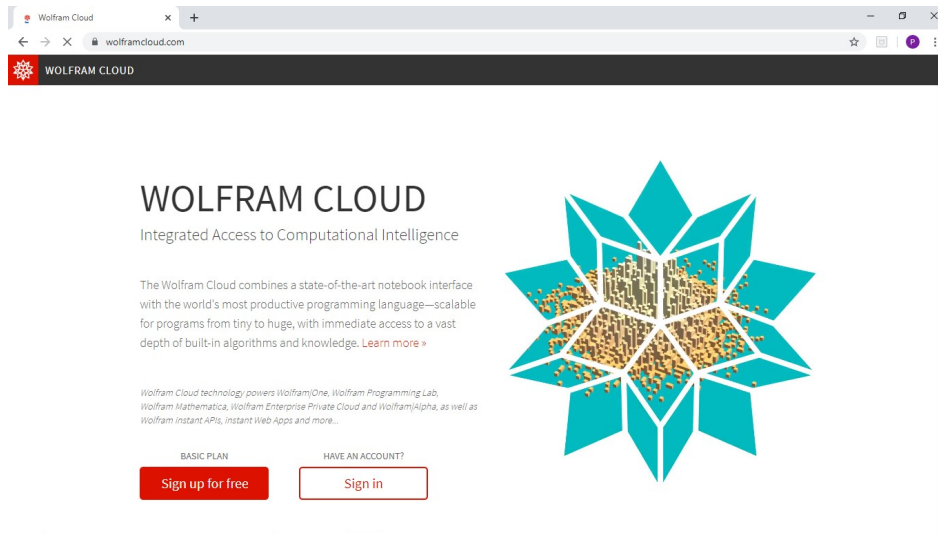
los cuales están explicados y disponibles de manera gratuita en:

<https://www.wolframcloud.com/obj/elmamila/Published/solucion.nb>

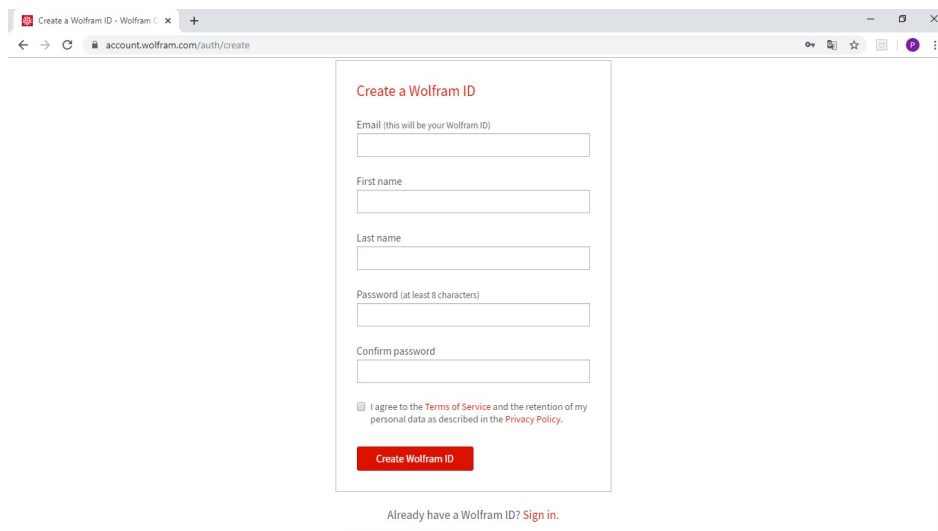
para apoyar el aprendizaje que se impulso en este trabajo.

A Tutorial Wolfram

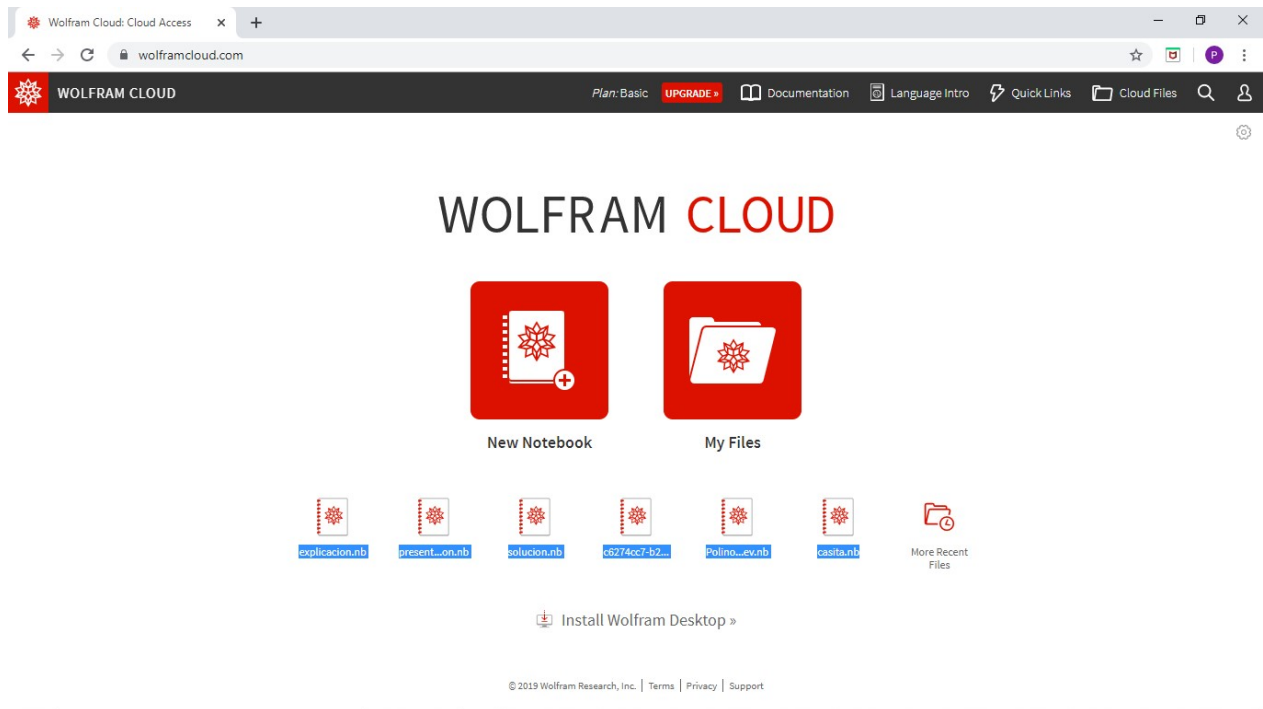
En esta sección se muestra un tutorial básico para el uso del WolframCloud. Para comenzar en nuestro buscador nos metemos a la página wolframcloud.com, se desplegará una ventana como la siguiente.



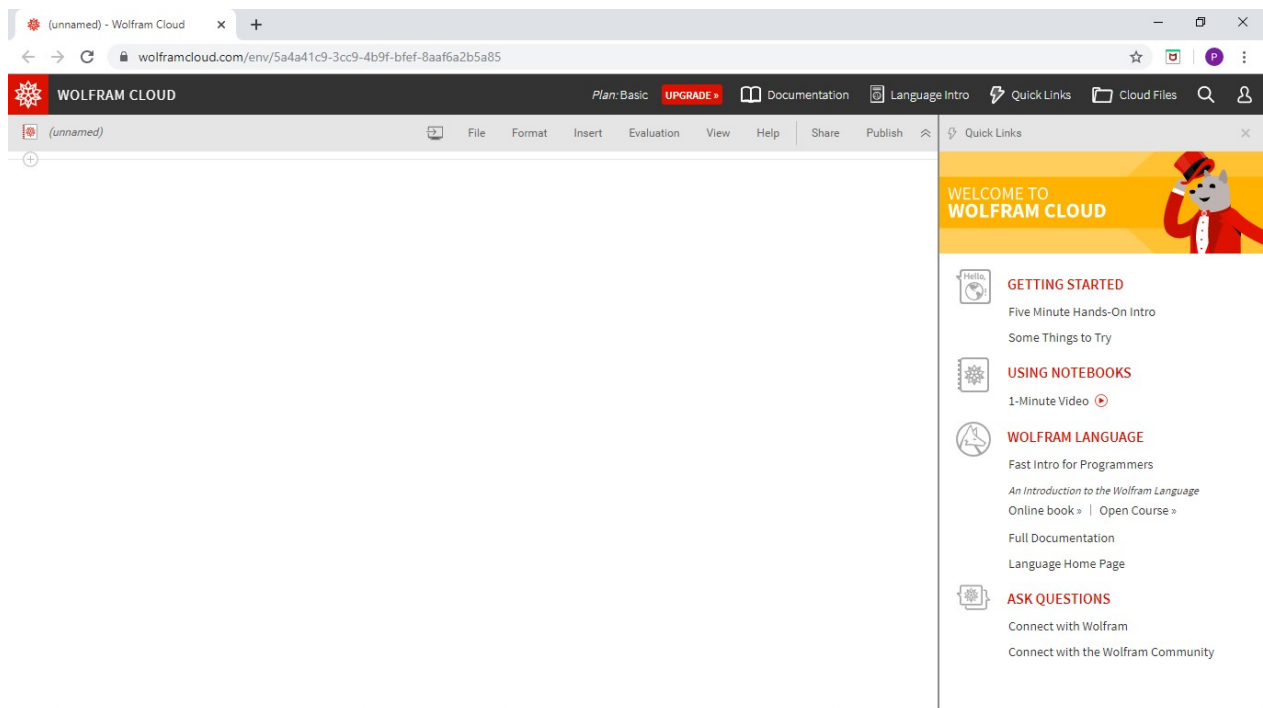
Para acceder, debemos crear una cuenta, para ello damos clic en Sign up for free, y llenamos los datos que se nos piden.



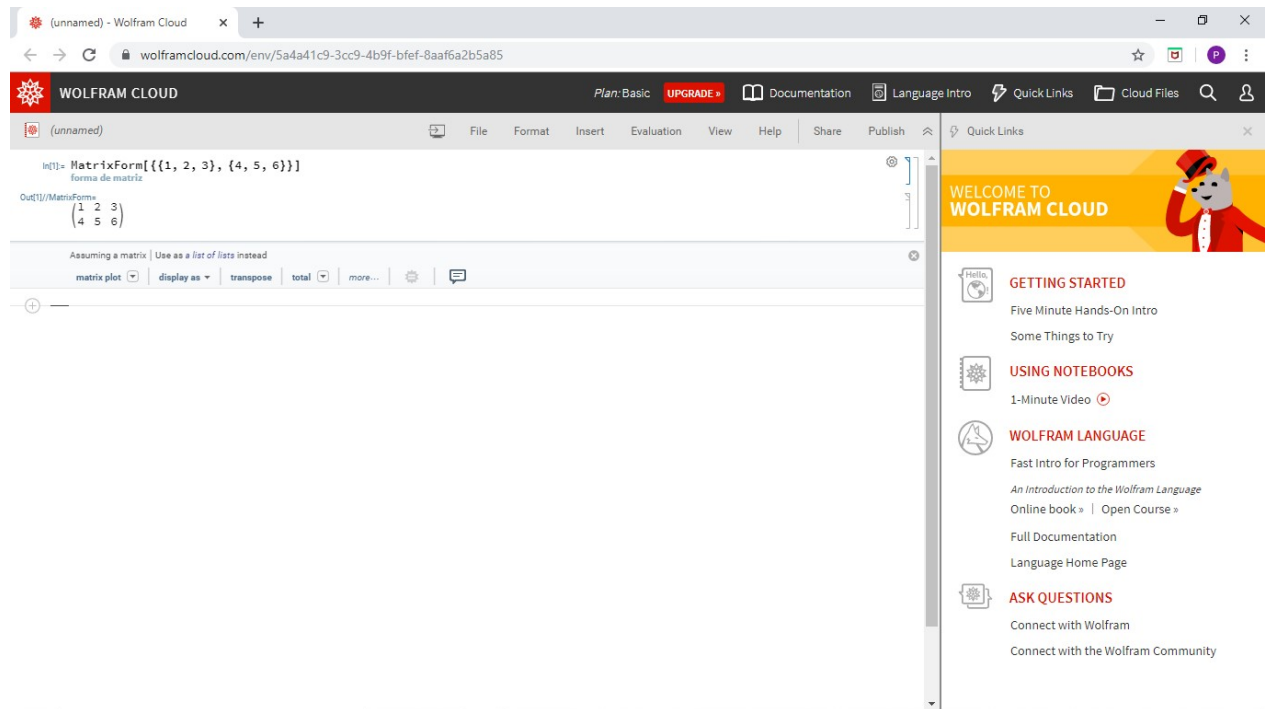
Se desplegará una ventana como la que se muestra abajo, para comenzar a trabajar hacemos clic en New Notebook.



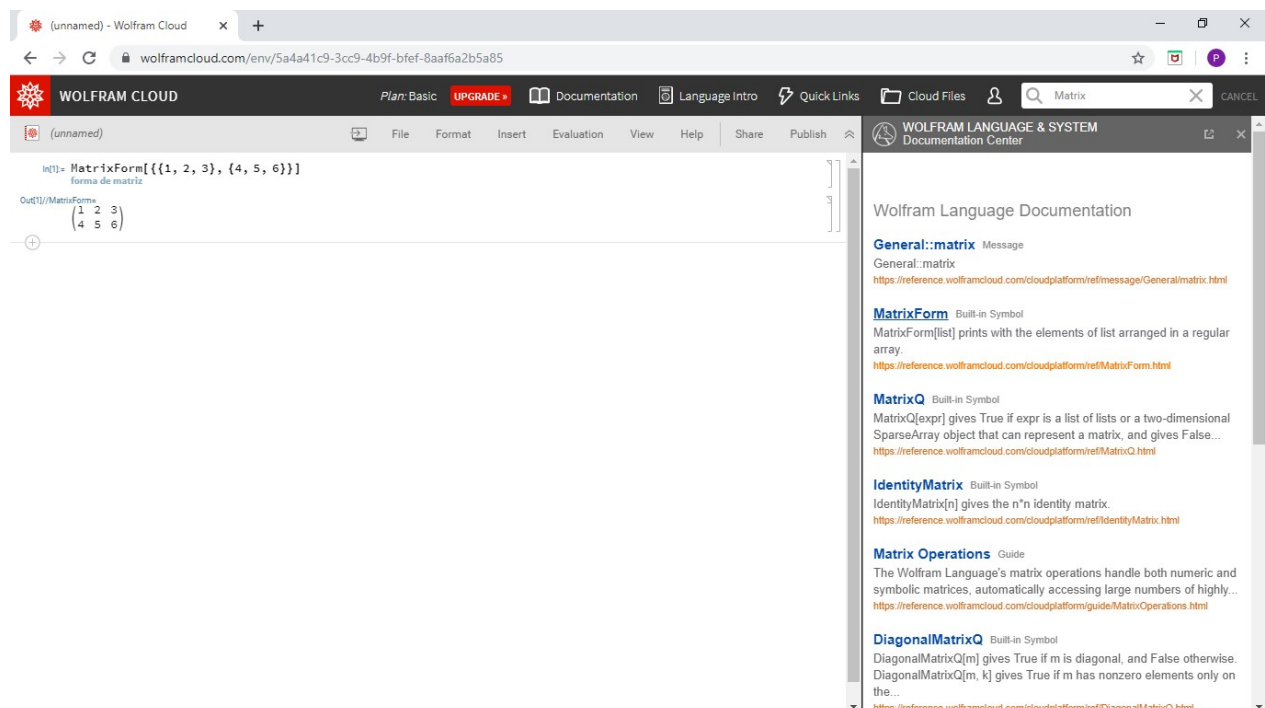
Se abrirá una ventana en blanco, donde será nuestro lugar de trabajo.



En el ejemplo de la imagen usamos el comando MatrixForm.



En caso de no saber los comandos que se quieren usar, en la parte superior derecha se encuentra el buscador, es importante poner las referencias en inglés, se abrirá una pestaña donde vienen varias opciones, por lo general viene un tutorial en extenso referente al tema.



Después de dar clic en el tema, se despliega una ventana donde se nos indica como usar los comandos y algunos ejemplos ya desarrollos.

The screenshot displays the Wolfram Cloud web interface. The main workspace shows the input `in[1]:= MatrixForm[{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}}]` and the output `Out[1]:= MatrixForm[ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ]`. The right sidebar is open to the 'Matrix Operations' section of the Wolfram Language & System Documentation Center. This section provides an overview of matrix operations and lists several functions with their usage instructions:

- Matrix Operations**: The Wolfram Language's matrix operations handle both numeric and symbolic matrices, automatically accessing large numbers of highly efficient algorithms. The Wolfram Language uses state-of-the-art algorithms to work with both dense and sparse matrices, and incorporates a number of powerful original algorithms, especially for high-precision and symbolic matrices.
- +, *, ^, ...** — all automatically work element-wise
- Dot (.)** — products of matrices, automatically handling row and column vectors
- Inverse** — matrix inverse (use [LinearSolve](#) for linear systems)
- Transpose** — transpose (m^T , entered with `esc tr esc`)
- ConjugateTranspose** — conjugate transpose (m^* , entered with `esc ct esc`)
- Tr** — trace
- Det** — determinant
- Permanent** — permanent
- KroneckerProduct** — matrix direct product (outer product)

B Comandos básicos de Wolfram

En este apartado se exponen las funciones básicas que se usaron en este trabajo y los códigos de los programas que se desarrollaron en WolframCloud cuya dirección electrónica es <https://www.wolframcloud.com>., lo único que se necesita para el uso de este Software es tener un correo electrónico.

Para sumar matrices se usa el símbolo "+" y para la multiplicación de matrices se usa el símbolo ". ", y para multiplicación por escalar solo se pone a lado de la matriz a multiplicar, estas son las operaciones básicas para el desarrollo de la mayoría de los ejercicios. A continuación se muestra ejemplos de los comandos. Si se tienen dudas acerca de la utilización de algún comando o se quiere buscar alguno que haga algo específico, se puede buscar presionando la tecla F1, lo cual desplegará una ventana de ayuda.

```
In[1]:= First[{1, 2, 5, 6, s, s, f}]
```

```
Out[1]= 1
```

```
In[2]:= Rest[{1, 2, 5, 6, s, s, f}]
```

```
Out[2]= {2, 5, 6, s, s, f}
```

```
In[3]:= Join[{1, 2, 3}, {e}, {4, x}]
```

```
Out[3]= {1, 2, 3, e, 4, x}
```

Las matrices se pueden introducir como listas, si queremos verlas de la manera usual, utilizamos el comando `MatrixForm`.

```
In[18]:= A = {{.1, .2, .3, .4}, {.5, .6, .7, .8}}; MatrixForm[A]
```

```
Out[18]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix}$$

```
In[17]:= B = {{.1}, {.2}, {.3}}; MatrixForm[B]
```

```
Out[17]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

```
In[16]:= F = {{{.1, .2, .3}}, {{.4, .5, .6}}}; MatrixForm[F]
```

```
Out[16]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.5 \\ 0.6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Para construir matrices podemos usar el comando `Table`, el cual utiliza como argumentos una función y los rangos donde varía la función.

```
In[30]:= Table[x + y, {x, 1, 3}, {y, 0, 2}]
```

```
Out[30]= {{1, 2, 3}, {2, 3, 4}, {3, 4, 5}}
```

En el ejemplo anterior las entradas de la matriz son de la forma $x+y$, donde x varía de 1 a 3 y y varía de 0 a 2, así $\{1,2,3\}=\{1+0,1+1,1+2\}$ se fijó x y varió y , de manera similar $\{2,3,4\}=\{2+0,2+1,2+2\}$.

El comando `Image`, usa como argumentos matrices, si las matrices tienen entradas son números reales, nos dará una imagen en blanco y negro, en caso de que las entradas sean matrices 3×1 o 4×1 , deberemos especificar el sistema de colores a usar con el comando `ColorSpace->"`.

```
In[19]:= Image[A]
```

```
Out[19]=
```



```
In[20]:= Image[B]
```

```
Out[20]=
```



```
In[24]:= Image[F, ColorSpace -> "RGB"]
```

```
Out[24]=
```



```
In[26]:= Image[F, ColorSpace -> "HSB"]
```

```
Out[26]=
```



Para poder saber la dimensión de las imágenes usamos el comando `ImageDimensions` y para saber el sistema de colores de la imagen usamos el comando `ImageColorSpace`, ambos comandos usan como argumentos imágenes.

```
In[27]:= ImageDimensions[
```



```
]
```

```
Out[27]= {720, 480}
```

```
In[28]:= ImageColorSpace[
```



```
]
```

```
Out[28]= RGB
```

C Programas desarrollados

En esta sección se muestra el código de los programas que se desarrollaron.

1. Negativo de Imagen.

```
Negativo[imagen_] :=
Image[Table[1, {i, First[Rest[ImageDimensions[imagen]]]},
{j, First[ImageDimensions[imagen]]}] - imagen
```

2. Multiplicación término a término de matrices.

```
Multiplicionterminoatermino[matrix1_, matrix2_] :=
If[Length[matrix2] ≠ Length[matrix1], "No se puede realizar la multiplicacion",
If[Length[matrix1] == 0, {}, Join[{First[matrix1] * First[matrix2]},
Multipli[Rest[matrix1], Rest[matrix2]]]]];
```

3. Detección de movimiento en imágenes.

```
Deteccionmovimiento[imagen_, imagen1_] :=
If[imagen - imagen1 ==
Image[Table[0, {i, First[Rest[ImageDimensions[imagen]]]},
{j, First[ImageDimensions[imagen1]]}]], "Sin movimiento", "Movimiento"];
```

4. Para multiplicar una matriz como si fuera un escalar a una imagen, como la definición dada en (3.4), se puede utilizar el siguiente comando

```
Map[matrix.#&, imagen, {2}]
```

Ejemplo. La matriz a la izquierda se multiplica por todos los términos de la matriz de la derecha como en la definición de (3.4).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

D Ejercicios y Soluciones

En éste apéndice, se agregó los ejercicios y soluciones, tal como se encuentran las direcciones descritas, en las conclusiones. Cabe recalcar que las soluciones descritas aquí, son una manera de resolver los ejercicios ya que en algunas ocasiones es posible encontrar varias maneras de resolverlos.

Ejercicios Propuestos

En éste trabajo se usará de manera constante Félix el gato, por lo que se deja abajo su representación matricial en blanco y negro

Félix = {{1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0},
0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1},
{1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0},
0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0},
{1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0},
0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0},
{1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0},
0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0},
{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0},
0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0},
0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0},

```

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0},
{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0},
{1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0},
{1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0},
{1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0,
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1,
1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}};

```

1.-Considerar la Reflejo=matriz con 1's en la antidiagonal de tamaño 35x35 calcular lo siguiente

a) Reflejo.Felix , b) Felix.Reflejo, c) ReflejoxF, d) FxReflejo.

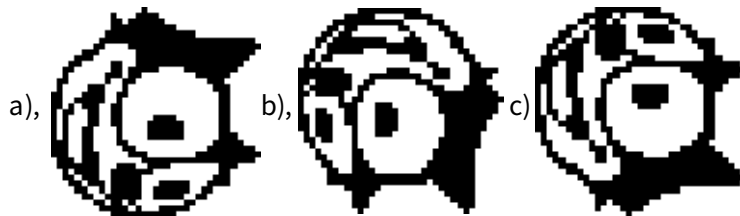
El símbolo "." denota el producto de matrices usual y "x" el producto componenete a componente

2.-Basado en la respuesta de lo anterior ¿Cuál de las operaciones puede ser conmutativa? Demostrar que efectivamente lo es

3.-¿Cuál de las siguientes imagenes corresponde a la traspuesta de Félix ?



4.-Determinar el orden de las operaciones multiplicación, transpuesta, suma y Reflejo (Reflejo es matriz de ejercicio 1), a aplicar para poder obtener, apartir de Félix, las siguientes modificaciones:

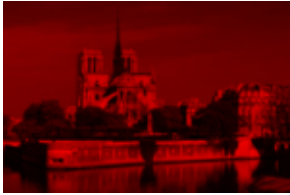


5.-Elegir una imagen A y un número $a \gg 1$, para calcular $a[(1/a)A]$, $(1/a)[aA]$ y comparar con A

6.-Determinar matriz para obtener la siguiente sucesión de Félix



```
MapThread[ImageMultiply, {ColorSeparate[, {Red, Green, Blue}]]
```



1.-Necesitamos crear una tabla por lo cual usamos el comando Table, una forma posible de hacerlo es la siguiente:

Table[KroneckerDelta[i+j,36],{i,35},{j,35}], la función KroneckerDelta es igual a 1 si el primer argumento es igual al segundo, en este caso **i** representa el número de fila y **j** representa la columna.

Mientras que la multiplicación componente a componente el programa desarrollado es

```
Multipli[n_,m_]:=If[Length[m]!=Length[n],"No se puede realizar la multiplicacion",
```

```
If[Length[n]==0,{},Join[{First[n]*First[m]},Multipli[Rest[n],Rest[m]]]]];
```

```
In[13]:= Reflejo = Table[KroneckerDelta[i + j, 36], {i, 35}, {j, 35}];
```

```
Multipli[n_, m_] := If[Length[m] ≠ Length[n], "No se puede realizar la multiplicacion",
```

```
If[Length[n] == 0, {}, Join[{First[n]*First[m]}, Multipli[Rest[n], Rest[m]]];
```

```

In[9]:= Felix = {{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  {1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  {1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  {1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  {1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  {1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  {1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  {1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  {1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1},
  {1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1},
  {1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1},
  {1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1},
  {1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0},
  0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1},
  {1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0},
  0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0},
  {1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0},

```

$\{0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0\},$
 $\{1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0,$
 $0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0\},$
 $\{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0,$
 $0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0\},$
 $\{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0,$
 $0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0\},$
 $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,$
 $1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0\},$
 $\{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,$
 $1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0\},$
 $\{1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,$
 $1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0\},$
 $\{1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1,$
 $1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0\},$
 $\{1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$
 $0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$
 $\{1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0,$
 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$
 $\{1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,$
 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1\},$
 $\{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1,$
 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1\},$
 $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$
 $1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1\},$
 $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$
 $0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1\},$
 $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1,$
 $0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1\},$
 $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1,$
 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1\},$
 $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1,$
 $1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1\},$
 $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0,$
 $0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1\},$
 $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1,$
 $1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\},$
 $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$
 $0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} \};$

Image[Reflejo.Felix]



Image[Felix.Reflejo]

Out[17]= 

Image[Multipli[Felix, Reflejo]]

Out[19]= 

Image[Multipli[Reflejo, Felix]]

Out[20]= 

2.- La multiplicación usual de matrices no es conmutativa como se vio en los primeros ejemplos, mientras que la multiplicación componente a componente si lo es puesto que $AxB=[a_{ij} b_{ij}] = [b_{ij} a_{ij}] = BxA$

3.-Basta calcular la traspuesta de Felix y aplicar el comando Image a está

Image[Transpose[Felix]]

Out[24]= 

Por lo que la respuesta es la imagen número 4.

4.- a) La primer imagen es el reflejo de la traspuesta, Transpuesta[Felix].Reflejo

b) Es el Reflejo de Reflejo.Felix, por lo que para obtenerla debemos calcular Reflejo.Felix.Reflejo

c) Es la Traspuesta de inciso anterior, por lo que basta calcular Transpuesta[Reflejo.Felix.Reflejo]

List[Image[Transpose[Felix].Reflejo],

Image[Reflejo.Felix.Reflejo], Image[Transpose[Reflejo.Felix.Reflejo]]

Out[28]= 

5.- Al hacer el procedimiento no resulta la imagen inicial, esto se debe a que la computadora no distingue entre el valor del píxel 1 o 5, por lo que ambos los toma como 1, correspondiente al color blanco. Por lo que al multiplicarlo por una imagen por un valores mayores a 1 se convierten en 1. Por lo que la multiplicación no es conmutativa.

A continuacion la imagen sera multiplicada por 5, despues la imagen resultante dividida por 1/5.

$$\left(\begin{array}{c} 5 \end{array} \right)$$


Out[69]=



$$1/5$$



Out[70]=

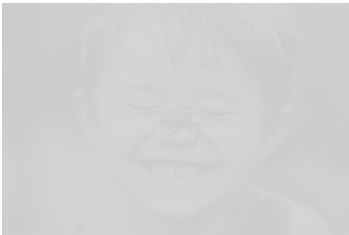


En este caso primero se multiplico por 1/5 y despues se multiplico por 5.

$$1/5$$



Out[71]=



$$5 \star$$



Out[72]=



Se obtuvieron resultados distintos en cada caso.

6.- La clave de este ejercicio es entender de manera adecuada la multiplicación, para ello con un

ejemplo de 3x3 esperamos que se pueda crear la idea general de mover columnas.

$$\begin{pmatrix} x & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$$

En el lado derecho ¿cómo se obtuvo x?, es decir que fila y columna se tuvo que multiplicar para obtenerlas, x esta en el lugar 1,2 lo que significa que se multiplico del lado izquierdo la fila 1, la cual es $(x \ b \ c)$, con la columna 2 la cual es $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, así se tiene $x = xa_{12} + ba_{22} + ca_{32}$, lo cual se cumple

para todo x, b, c.

Sustituyendo $x=1, b=0, c=0$, $1=a_{12}$, sustituyendo $x=0, b=1, c=0$, $0=a_{12}$ y por último con $x=0, b=0, c=1$, $0=a_{32}$.

De este modo obtenemos los valores de la matriz requerida $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, recordemos que el 0

representa el color negro por lo que después de multiplicar A, debemos sumarle $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De manera general las operaciones para una matriz de desplazamiento es de la forma $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ si queremos el espacio desplazado en blanco, al resultado sumar una matriz}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una posible implementación sería definir $A = \text{Table}[\text{If}[j-i==1, 1, 0], \{i, 35\}, \{j, 35\}]$, la cual representa la matriz A, $B = \text{Table}[\text{If}[j==1, 1, 0], \{i, 35\}, \{j, 34\}]$, y aplicarlo de la siguiente manera $\text{Image}[\text{Félix}.A+B]$, para después aplicarlo de manera recursiva.

7.- Se puede plantear de la solución de la misma manera que el ejercicio anterior solo se debe tener cuidado en el orden de la multiplicación, ya que si lo hacemos del mismo modo es imposible de hacer, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el 1 esta en la posición 2x1 por lo que para obtenerlo se tuvo que multiplicar la fila 2 de la primera matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con la columna 1 de la segunda, pero claramente el resultado es cero. Pero si multiplicamos por el lado izquierdo, se puede obtener la matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

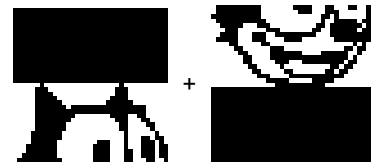
De manera análoga se tiene que la matriz que recorre una fila es $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 1 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. - Una manera de resolver el problema es borrar la mitad superior de Félix y bajarla 17 filas (aplicar 17 veces el ejercicio 7), para después borrar la mitad inferior y subirla 17 filas. Entonces ¿Como borrar las filas? Notemos lo siguiente :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que si queremos borrar la fila 2, solo debemos cambiar de la matriz identidad el termino a_{22} , por cero.



Una posible implementación sería

```
Fila[n_] := Table[If[i == j && n != i, 1, 0], {i, 35}, {j, 35}];
"quita la fila";
Agregar[n_] := Table[If[i == j && n == i, 1, 0], {i, 35}, {j, 35}];
"Deja la fila a intercambiar";
Subir[n_] := MatrixPower[Table[If[j - i == 1, 1, 0], {i, 35}, {j, 35}], n];
"sube fila n veces";
```

```
Bajar[n_] :=
  MatrixPower[Transpose[Table[If[j - i == 1, 1, 0], {i, 35}, {j, 35}]], n]
  "Baja la fila n veces",
```

Así el comando `Image[Bajar[17].Felix + Subir[17].Felix]` hace lo requerido.

9.- Para cambiar Félix a color verde se usa lo siguiente comando `ReplaceAll[{1->{0,1,0},0->{0,0,0}}][Felix]` y al rojo `ReplaceAll[{1->{1,0,0},0->{0,0,0}}][Felix]`. Las entradas de Félix verde son de la

forma $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, las cuales se pueden cambiar al rojo mediante una multiplicación de matrices a

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Generalizando el concepto de multiplicación por escalar, vamos a multiplicar las

entradas de la matriz por otra matriz como si fuera escalar, es decir,

$$\Gamma \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma a_{11} & \Gamma a_{12} & \Gamma a_{13} \\ \Gamma a_{21} & \Gamma a_{22} & \Gamma a_{23} \\ \Gamma a_{31} & \Gamma a_{32} & \Gamma a_{33} \end{pmatrix}, \text{ en nuestro caso } a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \text{ y } \Gamma \text{ es una matriz.}$$

¿Como determinar la matriz Γ ? Queremos que Γa_{ij} sea una matriz de 3×1 , pero como a_{ij} es matriz de 3×1 , necesitamos que Γ sea una matriz de 3×3 , por eso la importancia de multiplicar por la izquierda, ya que si hubieramos definido la multiplicación por la derecha Γ tendría que ser una matriz de $1 \times n$, para poder hacer la multiplicación y la única manera que el resultado sea una matriz de 3×1 , es $n=1$.

Queremos que pase lo siguiente $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, pero

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ por lo que } a_{12}=1, a_{22}=0, a_{32}=0, \text{ esta es la única condición, por}$$

simplicidad las demás entradas las consideramos 0.

Así para cambiar la imagen de verde a rojo, solo debemos multiplicar por la izquierda por $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

para ello se puede implementar de la manera siguiente

`Image[Map[{{0,0,0},{1,0,0},{0,0,0}}.#&,Felix,{2}],ColorSpace->"RGB"]`, este programa lo que hace es definir la multiplicación generalizada que acabamos de definir.

10.- Para descomponer una imagen en sus colores primarios, usamos el concepto de multiplicación generalizada, ahora debemos tener en cuenta que las entradas de la imagen son de la forma

$a_{ij} = \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$, y generalmente las entradas son distintas de cero. Así por ejemplo si queremos la

descomposición de la imagen del color rojo debemos encontrar la matriz Γ , para ello planteamos

la siguiente ecuación $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, solo nos interesa obtener a_{11} ya que es la que

contiene la información del color rojo. Como se cumple para todo elemento de la matriz,

$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de manera similar se obtiene la descomposición en verde y azul.

(Depurar) In[1]:=

```
sr = ImageData[
```



(Depurar) In[2]:=

```
pr = {{1, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}};
pv = {{0, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 0}};
pa = {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 1}};
```

(Depurar) In[3]:=

```
Image[Map[pr.# &, sr, {2}], ColorSpace -> "RGB"]
```

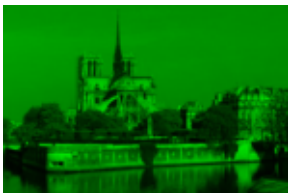
(Depurar) Out[3]:=



(Depurar) In[4]:=

```
Image[Map[pv.# &, sr, {2}], ColorSpace -> "RGB"]
```

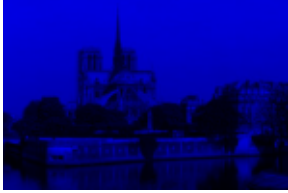
(Depurar) Out[4]:=



(Depurar) In[5]:=

```
Image[Map[pa.## &, sr, {2}], ColorSpace -> "RGB"]
```

(Depurar) Out[5]:=



Bibliografía

- Allali, M. (2010). Linear algebra and image processing. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(6), 725–441. doi: 10.1080/00207391003675133
- Artigüe, M. (2013). La educación matemática como campo de investigación y como un campo de práctica: Resultados, desafíos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 43-59.
- Cajori, F. (2011). *A history of mathematical notations*. Dover Publications.
- Caridade, C. M. R., Pedro, R., y Nora, N. Q. (s.f.). *Applying image processing techniques to motivate students in linear algebra classes*.
- Cuevas, E., Zaldívar, D., y Pérez, M. (2010). *Procesamiento digital de imágenes con MATLAB y Simulink*. [Primera edición]. Alfaomega.
- Elizondo, J. J. E. (2002). *Fundamentos de procesamiento de imágenes*.
- Fiftieth anniversary of first digital image marked*. (s.f.). Descargado de <https://www.nist.gov/news-events/news/2007/05/fiftieth-anniversary-first-digital-image-marked>
- Friedberg, S., Insel, A., y Spence, L. (2002). *Linear Algebra* [4^{ta} Edición]. Pearson.
- Jiménez, R. H., Moreno, C., Guzmán, D. S., y García, R. (2011). Cálculo didáctico de la edad del universo y la importancia de la constante cosmológica en un modelo Λ CDM. *Latin-America Journal of Physics Education*.
- Juárez, J. M., y Mendoza, C. G. (2016). Historia del Determinante. *Revista Mexicana de Ciencia*, 67, 61-69. Descargado de https://www.revistaciencia.amc.edu.mx/images/revista/67_1/PDF/Determinante.pdf
- Lang, S. (2000). *Linear algebra*. Springer.
- Lee, H. (2005). *Introduction to color imaging science*. Cambridge University Press.
- Marks, L. (1974). *Sensory processes: The new psychophysics*. Academic Press.
- Mejía, J. R. (2005). *Apuntes de procesamiento digital de imágenes*.
- O'Connor, J., y Robertson, E. F. (1996). *Matrices and determinants*. Descargado de http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants.html
- Ortíz, M. M. (2013). *Procesamiento digital de imágenes*.

- Pozo, J. I. (2008). *Aprendices y Maestros la psicología cognitiva del aprendizaje*. 2ª Edición. Alianza Editorial.
- Resnick, R., Halliday, D., y Krane, K. S. (2002). *Física*. CECSA.
- TecNM. (2016). *Álgebra lineal acf-0903*. Descargado de <http://ith.mx/documentos/reticulas/biomedica/Semestre%202/6-ACF0903%20Algebra%20Lineal.pdf>
- UNESCO. (2010). *Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base*. Descargado de <http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776F.pdf>
- UNESCO. (2013). *Enfoques estratégicos sobre las tics en la educación en américa latina y el caribe*.
- Urgellés, J. G. (2010). *Cuando las rectas se vuelven curvas*. RBA LIBROS.
- Vega, J. P., Huizar, A. R., Quirino, L., García, F. M., y Rangel, I. D. (2008). La memoria del universo. *Revista de la Academia Mexicana de Ciencias*. Descargado de https://www.revistaciencia.amc.edu.mx/images/revista/59_4/PDF/03-457-MemoriaUniverso.pdf
- Vilet, J. R. M. (2005). *Apuntes de procesamiento de imágenes*.
- Whitehead, A. (1965). *Los fines de la educación y otros ensayos* [3ª ed]. Paidós.
- Zamora, F. G. O. (2002). *Procesamiento morfológico de las imágenes en color. aplicación a la reconstrucción geodésica* (Disertación Doctoral). Universidad de Alicante.