



**Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en
Educación Técnica**

**Propuesta didáctica en la enseñanza del Binomio de Newton
para la educación media superior.**

Tesina para obtener el grado de:
**Especialista en Aprendizaje y Enseñanza de las Ciencias
Básicas.**

Presenta:
Maria Lesvia Escobar Hernández

Director de tesina:
Dr. Gustavo Arroyo Delgado.

Querétaro, Qro, México. Junio 2022



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en
Educación Técnica

Santiago de Querétaro, Qro. **27/06/2022**
OFICIO D.P. 255/2022

MARÍA LESVIA ESCOBAR HERNÁNDEZ
PRESENTE

Asunto: Autorización de publicación de Tesina

Por este medio, informo a usted que se autoriza la publicación de su trabajo de tesina denominado:

"Propuesta didáctica en la enseñanza del binomio de Newton para la educación media superior"

Que presenta para optar el grado de Especialista en Aprendizaje y Enseñanza de las Ciencias Básicas.

Esta autorización se emite conforme al dictamen que otorga el comité académico integrado por:

Gustavo Arroyo Delgado
Raquel Cárdenas Collazo
Alberto Sánchez Moreno

Director de tesina
Integrante del Comité Tutorial
Integrante del Comité Tutorial

Este oficio de autorización de publicación tendrá vigencia hasta el 24 de junio de 2022.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica
Calidad para la calidad en educación superior tecnológica

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
DIRECCIÓN GENERAL DE INVESTIGACIÓN
Y DESARROLLO TECNOLÓGICO

ANA MARÍA ESTRADA AGUILÓN
JEFA DEL DEPARTAMENTO DE POSGRADO

C.c.p. Jazel Giovanna García Aguillón – Jefa del Departamento de Servicios Escolares – Presente.
Archivo.



Av. Universidad No. 282 Pte., Col. Centro, C.P. 76000,
Querétaro, Qro. Tels. (442) 2 16 37 46, 47 y 48;
ext. 410, e-mail: posgrado@cuidet.edu.mx
www.tecnm.mx | www.cuidet.edu.mx



Dedicatorias

We are what they grow beyond, that is the true burden of all masters.

Master Yoda

A mi madre, de quien no me cansaré de decir que es lo mejor que tengo en mi vida, gracias por apoyarme siempre en todas las dediciones que tomo y por tus consejos. Y a mis hermanos Erika y Luis Angel quienes siempre han sido mi motivación para ser mejor persona y ser ejemplo para ustedes.

A mi director de tesina, el doctor Gustavo Arroyo, por brindarme todo su apoyo desde el inicio de la tesina y hasta el término de esta. Y por motivarme siempre para terminar mi proyecto. A mis maestro, el doctor Alberto Sánchez y la maestra Raquel Cárdenas. Por su grandes enseñanzas, clases, consejos y apoyo durante mi estancia académica y el desarrollo de mi tesina.

Abril, Adrián R., Adrián V., Ámbar, América, Andy, Angélica, Cartela, Christian, Danna, Emiliano, Escobar, Frida, Gabo, Gael, Ivonne, Jenny, Jeshua, Jocelyn, Karen, Luis Alberto, Mario, Mau, Montse, Napabé, Nohemí, Raquel, Raúl, Sergio, Sirvent, Valeria, Victor, Ximena, Yeshua, Yosú. Gracias chicos por permitirme ser su maestra, siempre los llevaré en el corazón.

Resumen

La asignatura de matemáticas es una de las más importantes que llevan los alumnos a lo largo de su formación académica. Ya que desarrolla su pensamiento utilizando problemas aritméticos, algebraicos, probabilidad y estadística, etc. Sin embargo, esta materia suele ser una de las que menor rendimiento académico presenta y esto puede ser consecuencia de distintas razones. Para este trabajo nos enfocaremos en un tema en especial, los productos notables, centrándonos en la enseñanza del binomio de Newton, el cual es un tema que se enseña durante el primer semestre de nivel medio superior y se retoma en niveles posteriores.

Para llevar a cabo una secuencia didáctica sobre la enseñanza del binomio de Newton, nos apoyaremos con los tipos de aprendizaje de Pozo y con las teorías de aprendizaje de Ausubel, Vygotski y Piaget sobre el constructivismo. Esto nos ayudará a entender mejor el proceso de aprendizaje que tienen los alumnos y la forma en como podemos abordar a cada uno de ellos. Y dentro de las herramientas didácticas que se utilizarán está, la historia como recurso didáctico y el aprendizaje basado en problemas.

Se realizará una revisión histórica y bibliográfica del binomio de Newton. También se abarcará el desarrollo de la forma geométrica de binomio al cubo, algunos problemas de aplicación y la elaboración de una secuencia para la enseñanza del binomio de Newton.

Abstrac

Mathematics is one of the most important subjects that students take throughout their academic training. Since it develops their thought using arithmetic, algebraic, probability and statistics problems, etc. However, this subject is usually one of those with the lowest academic performance and this could be a consequence of different reasons. For this project we will focus on a special topic, notable products, focusing on the teaching of Newton's binomial. Which is a topic that is taught during the first semester of high school and is taken up again at later levels.

To carry out a didactic sequence on the teaching of Newton's binomial, we will support on Pozo's types of learning and the learning theories of Ausubel, Vygotski and Piaget about constructivism. This will help us to better understand the learning process that students have and how we can approach each of them. And with respect to the didactic tools that will be used, we have history as a didactic resource and problem-based learning.

A historical and bibliographic review of Newton's binomial will be carried out. Also the development of the geometric form of the cubed binomial, some application problems and the development of a sequence for teaching Newton's binomial, will also be covered.

Índice general

Índice de figuras	13
1. Introducción	15
1.1. Descripción de la problemática	16
1.2. Justificación del problema	17
1.3. Objetivo	18
1.3.1. Objetivo General	18
1.3.2. Objetivos Específicos	18
1.4. Organización de la Tesina	18
2. Marco Teórico Didáctico	19
2.1. Tipos de Aprendizaje	19
2.1.1. Aprendizaje Verbal (Aprendizaje de hechos y datos)	20
2.1.2. Aprendizaje Procedimental	24
2.2. Teorías de Aprendizaje	27
2.2.1. Ausbel. Aprendizaje Significativo	27
2.2.2. Piaget. Teoría de Desarrollo Cognitivo	28
2.2.3. Vygotski. Teoría Sociocultural	28
2.3. Herramientas didácticas	29
2.3.1. Historia como recurso didáctico	29
2.3.2. Aprendizaje basado en problemas	31
2.4. Secuencia Didáctica	34
2.4.1. Líneas de Secuencias Didácticas	36
2.4.2. Líneas de Evidencias de Evaluación del Aprendizaje	37
3. Marco Teórico Disciplinar	39
3.1. Historia del Binomio de Newton	39
3.1.1. Babilonia (2000 a.C. al 1600 a.C.)	39
3.1.2. Grecia (600 a.C. al 300 d.C.)	40
3.1.3. India Antigua (900 a.C. al 200 d.C.)	41
3.1.4. India Clásica (Hacia 400 - 1600)	41
3.1.5. Arabia (Hacia 642 - 1258)	42

3.1.6. China y el Triángulo de Pascal (500 a.C. al 1300 d.C.)	43
3.1.7. Europa y el Triángulo de Pascal	46
3.1.8. Newton y el Teorema del Binomio	48
3.2. El Binomio de Newton en los Libros de Texto	50
3.2.1. Matemáticas I	50
3.2.2. Matemáticas I: Aritmética y Álgebra	52
3.2.3. Álgebra de Baldor	54
4. Propuesta Didáctica	57
4.1. Prototipo Didáctico	57
4.2. Problemas de Aplicación	60
4.2.1. Cálculo de raíces por medio del binomio	60
4.2.2. Interés compuesto	61
4.2.3. El número e	62
4.3. Secuencia Didáctica del Binomio de Newton	64
5. Conclusiones	71
A. Secuencia Didáctica	73

Índice de figuras

1.0.1 Ubicaciones de Multiversidad Latinoamericana.	15
2.1.1 Tipos de aprendizaje de Pozo.	19
3.1.1 Triángulo de Al-Karaji.	43
3.1.2 Triángulo de Pascal original.	44
3.1.3 Representación del Meru-prastara de Halayudha.	45
3.1.4 Triángulo de Jia Xian.	45
3.1.5 Triángulo de Yan Hui.	46
3.1.6 Frente del <i>Cálculos Comerciales</i>	47
3.2.1 Frente del libro de <i>Matemáticas I</i>	51
3.2.2 Frente del libro de <i>Matemáticas I: Aritmética y Álgebra</i>	53
3.2.3 Frente del libro de <i>Álgebra de Baldor</i>	54
4.1.1 Representación algebraica y geométrica de $(a + b)^2$	57
4.1.2 Representación algebraica y geométrica de $(a + b)^3$	58
4.1.3 Representación geométrica de $(a + b)^3$ vista por separado	59
4.1.4 Representación geométrica de $(a + b)^3$ vista frontal	59
4.1.5 Representación geométrica de $(a + b)^3$ vista posterior	60
4.1.6 Representación geométrica de $(a + b)^3$ vista superior	60

Capítulo 1

Introducción

Multiversidad Latinoamericana inició en el año 2010 ofreciendo el nivel de preparatoria en su modalidad presencial aperturando 9 campus desde su primer año (Aguascalientes, Tlajomulco, Tonalá, Hermosillo Norte y Sur, Los Mochis, Mexicali, San Luis Potosí y Torreón). Gracias a la forma de trabajo y programas implementados para ofrecer al alumnado una educación integral, ha ido creciendo y hoy en día cuenta con más de 26 campus (Figura 1.0.1) ofreciendo los niveles de secundaria y preparatoria, a nivel nacional cuenta con Bachillerato Virtual, y en 2019 tuvo inicio el nivel superior.



Figura 1.0.1: Ubicaciones de Multiversidad Latinoamericana.

Misión

Brindar un servicio educativo con calidad que permita a los alumnos un alto desarrollo de competencias, donde la eficacia y la eficiencia sean los paradigmas del trabajo educativo, basados en los aportes científicos y tecnológicos para maximizar el desarrollo del conocimiento y el fomento de los valores humanos. Hacer de los contenidos diarios una constante integración con los entornos escolares, para darle

verdadera significación al aprendizaje.

Visión

Ser una institución educativa con reconocimiento nacional, alto sentido social y modelo basado en estándares de calidad que nos permitan hoy y siempre responder a las expectativas que la sociedad mexicana demanda.

1.1. Descripción de la problemática

El campus en el que nos centraremos para especificar nuestra problemática, justificación y objetivos se encuentra en la ciudad de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas (Cuadro 1.1.1), ubicado en la 5a Pte. Nte. 1700, Nuevo Mirador, 29039 Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.

Semestre	Mujeres	Hombre	Total
Primero	10	7	17
Quinto	8	8	16
			33

Cuadro 1.1.1: Alumnos durante el ciclo 2020-2021

La asignatura Matemáticas I promueve el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en los estudiantes, mediante el uso de aritmética, álgebra, probabilidad y estadística, permitiéndoles proponer alternativas de solución a problemas tomados de su vida cotidiana desde diversos enfoques tales como el determinista o el aleatorio, teniendo en cuenta que los conocimientos no son el fin de la educación, sino una herramienta para que el estudiantado desarrolle las competencias que definen el perfil de egreso de la Educación Media Superior.

El álgebra es una de las ramas más importante de las matemáticas ya que estudia a las cantidades considerándolas del modo más general (Baldor, 1983), dando así la combinación de elementos y cantidades representándolos por medio de letras, símbolos o signos. Esta rama tiene diferentes áreas de aplicación, ya que sus aplicaciones pueden representar todos los valores y cantidades.

En la vida diaria nos podemos encontrar con diferentes situaciones que requieren una solución matemática utilizando el álgebra. Uno de los temas más importantes del álgebra son los productos notables, los cuales nos sirven para resolver ejercicios matemáticos y algunos de estos temas nos facilitan la solución de problemas al momento de aplicarlos. Un ejemplo de su aplicación es en ingeniería civil, donde se tienen que realizar distintos procedimientos para el cálculo de áreas, perímetros o superficies de distintos terrenos.

Dentro de los productos notables encontramos una herramienta que es de mucha utilidad, este es el Binomio de Newton, que en conjunto con el triángulo de Pascal dan una fórmula que nos enseña como resolver binomios elevados hasta la n potencia.

1.2. Justificación del problema

La importancia de enseñar a los alumnos de nivel medio superior a trabajar con el binomio de Newton y el triángulo de Pascal estriba en que cuando lleguen a un nivel superior en alguna carrera de ciencias exactas, y tengan que hacer procedimientos que involucren la solución de distintos binomios puedan resolverlos de manera más eficiente y rápida.

Sin embargo cuando los alumnos llegan al nivel superior en alguna carrera de ingeniería o ciencias, o a semestres superiores dentro del nivel bachillerato, presentan deficiencia en el área de las matemáticas (Cuadro 1.2.1), comúnmente en la rama de álgebra, por ejemplo cuando llevan la materia de cálculo diferencial o integral donde tienen que aplicar la solución de algunos productos notables, el tema se torna complicado ya que no pueden resolverlos o los realizan de forma incorrecta, ya sea por una mala multiplicación o factorización. El bajo rendimiento de los alumnos en la asignatura puede ser a causa de que los alumnos no van comprendiendo los temas que se van enseñando a lo largo del semestre.

Generación	Promedio semestral de la asignatura
2017	8,3
2018	8,4
2019	6,7
2020	6,1

Cuadro 1.2.1: Promedios de la asignatura de Matemáticas I por generación en Multiversidad Latinoamericana

Como se menciona anteriormente, las consecuencias que puede tener esto van desde una baja en el aprovechamiento académico de los alumnos hasta la deserción académica. Ya que en muchos casos cuando los estudiantes ingresan al nivel superior las materias en las que más presentan bajas suelen ser del área de físico-matemáticos y en algunos casos cuando el alumno ya recursó la materia más de una vez se le expulsa de la universidad.

El desinterés por parte de los alumnos hacia las matemáticas en varias ocasiones es porque no comprenden algún tema y desde ahí empiezan a ver lo complicado en los siguientes temas. Por eso cuando tienen que elegir alguna licenciatura optan por alguna que no tenga matemáticas. Hay que lograr que los estudiantes se sientan atraídos y tengan interés por materias de ciencias exactas y no únicamente como una materia que deben aprobar y tener una calificación.

1.3. Objetivo

1.3.1. Objetivo General

Elaborar una propuesta didáctica para la enseñanza del binomio de Newton, para que se comprenda su utilidad y aplicación en situaciones matemáticas en el nivel medio superior.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Revisión bibliográfica sobre la historia del Binomio de Newton
- Revisión bibliográfica sobre el binomio de Newton
- Revisión bibliográfica sobre la didáctica de las matemáticas y en particular la didáctica del binomio de Newton
- Elaboración de una secuencia didáctica
- Explicar de forma visual el binomio al cuadrado y al cubo

1.4. Organización de la Tesina

La tesina está constituida por cuatro capítulos. El primer capítulo, la introducción, trata sobre la institución educativa, la descripción de la problemática que se presenta en el nivel medio superior, pasando a la justificación del problema y finalmente introduciendo nuestro objetivo general del proyecto y los objetivos específicos, los cuales se espera que sean de utilidad para la enseñanza y aprendizaje del tema. El capítulo dos, está dedicado al marco teórico didáctico, en el cual se abordarán los tipos de aprendizaje que presenta Pozo, centrándonos en el aprendizaje verbal y procedimental. Dentro de este capítulo también abordamos las teorías de aprendizaje de Ausbel, Piaget y Vygotski sobre el constructivismo, el cual será de gran importancia en este proyecto. Y para finalizar el capítulo encontramos las herramientas didácticas, que son aquellas que nos ayudarán para realizar la secuencia didáctica, aquí encontramos el uso de la historia como recurso didáctico y el aprendizaje basado en problemas. El capítulo tres, presentamos el marco teórico disciplinar, donde se trata sobre la historia del binomio de Newton a lo largo de los años y sobre la presentación que tiene el binomio de Newton en libros de texto (tres bibliografías diferentes) que son utilizados en el nivel medio superior. En el capítulo cuatro, se presenta la propuesta didáctica, donde se habla sobre el prototipo didáctico que se propone para una mejor comprensión del binomio de Newton, también se mencionan algunos problemas de aplicación del binomio de Newton en el nivel medio superior y finalmente la estructura de la secuencia didáctica que se propone para la enseñanza del binomio de Newton. Finalmente, el capítulo cinco lo dedicamos a las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

Marco Teórico Didáctico

2.1. Tipos de Aprendizaje

El aprendizaje no solo es un cambio en la conducta de los alumnos, ya que tiene un impacto en el pensamiento y afectividad de estos. Y debemos considerar que para llevar a cabo distintas técnicas de aprendizaje, no sólo es labor del alumno, sino que también influyen los profesores, los temas que se estudiarán y el ambiente social donde se desarrollan las actividades (Ausubel et al., 1983).

Distintos autores mencionan diferentes tipos de aprendizaje de acuerdo al punto de vista de ellos o al modelo donde estén presentando su enfoque; de acuerdo a Pozo (2008b), se tienen una clasificación con cuatro tipos de aprendizajes (figura 2.1.1):

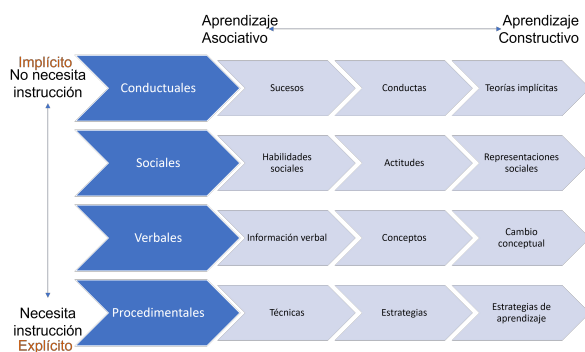


Figura 2.1.1: Tipos de aprendizaje de Pozo.

Tomando aquellos aprendizajes que necesitan una instrucción y pasando del aprendizaje asociativo al aprendizaje constructivo. De los cuales, se propone poner atención en los procesos de transformación de aprendizajes verbales y procedimentales; ya que el verbal es aprendizaje explícito, como son los conceptos y la teoría, y

los procedimentales son la adquisición y mejora de nuestras habilidades, destrezas o estrategias para hacer cosas concretas. Donde los resultados de aprendizaje que podemos obtener con el aprendizaje verbal son:

- Información verbal
- Conceptos
- Cambio conceptual

Y con respecto a un aprendizaje procedimental los resultados que obtendríamos son:

- Técnicas
- Estrategias de aprendizaje

2.1.1. Aprendizaje Verbal (Aprendizaje de hechos y datos)

Este aprendizaje consiste en la “incorporación de hechos y datos a nuestra memoria, sin dotarles necesariamente de un significado. Hay también otros muchos hechos cargados de significado, pero que nosotros hemos aprendido como mera información factual (Pozo, 2008b, cap 11) .

Es la información literal o incorporación de hechos y datos a nuestra memoria, aquella que no necesariamente requiere de un significado, o cuyo significado se escapa para nosotros, algo que debemos reproducir o repetir. Al decir reproducir o repetir con exactitud, nos referimos a que asegura en ciertas condiciones su conexión en nuestra memoria, sin necesidad de comprenderlo.

El aprendizaje de repaso tiene ciertos principios que rigen un aprendizaje por repetición:

- Efecto de la cantidad de práctica en el aprendizaje.
- Efecto de la cantidad de material por aprender en el incremento exponencial de la práctica.
- El tiempo transcurrido desde el aprendizaje produce un olvido.
- El efecto de la posición serial.
- Efecto de la semejanza de los elementos.
- Influencia del significado del material sobre su repaso.

Cuando la información está organizada, no es necesario adquirir nueva información para tener éxito al usarla. La información debe justificar su funcionalidad, su relevancia cultural, que haga probable su activación o recuperación frecuente. Para adquirir esta información más allá del repaso se tienen las siguientes estrategias:

- Trucos mnemotécnicos
- Condensación de información

2.1.1.1 Aprendizaje de conceptos

Ausubel et al. (1976, Pág. 61) definen los conceptos como "objetos, eventos, situaciones o propiedades de que posee atributos de criterios comunes y que se designan mediante algún símbolo o signos."

La comprensión de conceptos nos permite atribuir a los hechos que nos encontramos en la vida diaria como los responsables de la construcción de nuevo conocimiento, interpretándolos dentro de un marco conceptual.

El componente del aprendizaje será más significativo para el estudiante, en cuantas más relaciones establezca, no sólo con los elementos que lo componen, sino también, con otros conocimientos previos que tenga ya en su memoria permanentemente (Pozo, 2008b, pag 448).

De acuerdo a Pozo (2008b), se tienen algunos rasgos de las representaciones previas de los aprendices, los cuales son:

- Construcciones personales.
- Poseen coherencia desde el punto de vista del alumno, no desde el punto científico.
- Buscan la utilidad más que la verdad.
- Tienen un carácter implícito, se descubren en las actividades o predicciones.
- Son bastantes estables y resistentes al cambio.
- Son compartidos por otras personas, pudiéndose agrupar en tipologías.

Comenzar el proceso de explicitación, mediante una reflexión consciente por parte del estudiante. Intentar asimilar explícitamente los materiales de aprendizaje a las representaciones previas, produciendo no sólo crecimiento o expansión de esas representaciones previas, sino también, como consecuencia de esos desequilibrios o conflictos entre las representaciones previas y la nueva información, dando lugar a procesos de ajuste, por generalización y discriminación, o de reestructuración, o cambio conceptual de las propias teorías implícitas.

La comprensión de conceptos se basa en dos procesos complementarios, el primero que es la diferencia progresiva de los conceptos la cual consiste en diferenciar dos o más conceptos a partir de un conocimiento previo indiferenciado; y el segundo que es la integración jerárquica, donde los expertos tienen conocimientos integrados, su organización conceptual es más jerárquica, con menos categorías en cada nivel horizontal.

Se deben tener en cuenta ciertas precauciones para asegurar un aprendizaje de conceptos, los cuales son:

- Evitar preguntas y tareas donde la respuesta esté literalmente incluida en los materiales.
- Que las actividades se basen en contextos diversos y cierta generalización para evaluar en situaciones y tareas nuevas.
- Evaluar al inicio las representaciones previas de los estudiantes ayudándoles a explicitarlas.
- Promover uso espontáneo de las ideas personales de los estudiantes, entrenándolos en parafrasear o que describan por sí mismos diversos fenómenos.
- Minimizar miedo al error valorando las interpretaciones y las conceptualizaciones de los estudiantes que se alejan de la idea o teoría aceptada. Valoración antes y después de la instrucción.
- Utilizar técnicas indirectas que hagan útil la repetición y acostumbrar a los estudiantes al uso de sus propios conocimientos para resolver problemas y conflictos.

Ausubel et al. (1976) menciona que el aprendizaje de conceptos se adquiere a través de dos procesos, formación y asimilación, donde la formación de conceptos se obtiene mediante la experiencia, llevando a cabo distintas etapas de formación y la prueba de hipótesis, después de eso pasamos a la asimilación de conceptos que es cuando el alumno amplía su conocimiento sobre el concepto en cuestión y lo puede distinguir en distintas situaciones.

Es preciso inducir en los estudiantes una reflexión sobre su propio conocimiento, lo que no sólo les ayudará a tomar conciencia de ellos, sino también a reconstruirlos.

2.1.1.2 Aprendizaje de cambio conceptual o la reestructuración de lo aprendido

Es el proceso de transformación para lograr el aprendizaje de cambio conceptual o la reestructuración de lo aprendido. Consiste en “construir nuevas estructuras conceptuales que permiten integrar tanto esos conocimientos anteriores como la nueva información presentada” (Pozo, 2008b, pág 462).

Cuando las representaciones previas del estudiante son incompatibles con la conformación de nuevos modelos o teorías que deban aprender se es necesaria una reestructuración conceptual.

La incompatibilidad estructural hace necesario el cambio conceptual para acceder desde las teorías implícitas hasta el nuevo conocimiento científico o académico partiendo de tres principios, los cuales son:

- Conceptuales
- Epistemológicos

- Ontológicos

2.1.1.3 Principios Conceptuales

La estructura de relaciones conceptuales entre los componentes de la teoría, desde las simples estructuras asociativas, basadas en relaciones causales lineales hasta las complejas estructuras sistémicas basadas en la interacción de sus componentes (Pozo, 2008b, pág 468).

- Hechos o datos: Se describen en función de las propiedades y cambios observables.
- Causalidad lineal: Explicación de fenómenos mediante relaciones causales simples que van aumentando la complejidad.
- Interacción: Las propiedades de los cuerpos y los fenómenos se interpretan como un sistema de relaciones de interacción.

Es necesario un cambio de estructuras conceptuales para que esas relaciones aditivas unidireccionales, que están centradas en el cambio, se transformen en sistemas de interacciones. La idea de que los efectos se producen en un sólo sentido implica centrarse en el cambio (siendo la acción), olvidando los efectos recíprocos (siendo la reacción), que aseguran la conservación. Comprender el mundo natural y sociales, como un sistema de equilibrio en diversos parámetros es uno de los logros más sustantivos del conocimiento científico.

El llamado cambio conceptual requiere construir estructuras conceptuales más complejas a partir de otras más simples y, probablemente, establecer usos diferenciales para cada uno de los contextos de aplicación de esas teorías.

Adquirir los nuevos conocimientos no implica el relacionar algunos saberes con otros o conectarlos entre sí, sino diferenciar o separar, algo esencial para reducir (Pozo, 2008b, pag 472).

Para poder cambiar los modelos implícitos restrictivos y lograr un conocimiento complejo o disciplinar en un dominio dado, se deben llevar a cabo tres procesos de cambio conceptual.

- Reestructuración teórica
- Explicitación progresiva
- Integración jerárquica

Este triple proceso de cambio conceptual está lejos de ser algo automático, exigiendo usualmente la intervención de un maestro o, en general, de un diseño instruccional. Conforme los procesos de aprendizaje se hacen más complejos y elaborados están mucho más meditados por la instrucción y también más difíciles de lograr. Por lo tanto requieren estrategias específicas, ya que por su vulnerabilidad

están sujetos a la influencia de muchas variables imprevistas como menciona Pozo (2008b) cuando hablamos del cambio conceptual.

A lo largo de los años se han desarrollado diferentes modelos tóricos, estrategias instruccionales y didácticas del cambio conceptual. Con el propósito de promover ese cambio.

2.1.2. Aprendizaje Procedimental

Consiste en "la adquisición y mejora de nuestras habilidades, destrezas o estrategias para hacer cosas concretas, un resultado genéricamente llamado procedimiento, un saber hacer". Identificamos al procedimiento como un conjunto de acciones ordenadas, que van orientadas a la consecución de una meta. Dentro de este procedimiento tenemos algunas técnicas, también llamadas destrezas, habilidades, hábitos, etc., las cuales pueden ser motoras o intelectuales y estrategias, conocidas como tácticas, planes, etc. que en conjunto nos ayudan a lograr la meta planeada. Se tiene conocimiento que para poder llevar a cabo un procedimiento necesitamos de técnicas y estrategias (Pozo, 2008b, cap 12).

Hablando de un saber hacer o un saber procedimental, nos referimos a aquel conocimiento que lleva a cabo una serie de procedimientos, en comparación con el aprendizaje verbal, que es de tipo declarativo y teórico, el aprendizaje procedimental tiene que ser práctico, ya que se tienen que realizar diferentes acciones u operaciones (Díaz et al., 2015, Pág. 30).

2.1.2.1 Aprendizaje de técnicas

Para poder llevar a cabo un aprendizaje mediante la aplicación de técnicas o estrategias es necesario tener conocimiento de las fases principales para la adquisición de esta, ya que la naturaleza de los procedimientos presenta un grado mayor de complejidad que un aprendizaje verbal, el cual se obtiene por simple repaso. Las bases para llevar a cabo un aprendizaje sobre técnicas son:

- La presentación de instrucciones verbales o a través de un modelo. La cual puede ser una representación gráfica o imágenes.
- La práctica o ejercicios de las técnicas enseñadas por parte del maestro, hasta que el alumno la domine sin alguna guía o ayuda.
- El perfeccionamiento y la transferencia de las técnicas aprendidas a nuevas tareas, lo que nos da entender que el alumno domina la técnica.

Llevar a cabo una serie de pasos de forma correcta y sin desviarse en alguna instrucción, nos llevará a lograr la meta a la que queremos llegar con el procedimiento dado. Hay que tener en cuenta que no es lo mismo darle a nuestros estudiantes una lista de instrucciones a enseñarle la técnica adecuada para llevar a cabo un procedimiento.

Pongamos de ejemplo una clase de natación, donde podemos darle un libro a los alumnos para que conozcan los diferentes estilos de nadado, pero si no se les enseña la técnica, no lograrán llegar a un buen resultado.

En la actualidad, nuestras generaciones están muy acostumbradas a usar distintos equipos tecnológicos, como celulares, tablets, lap-tops, etc., con los cuales pueden acceder a diferentes plataformas como redes sociales, videos, etc. Hacer uso de estas plataformas, que pueden contener imágenes o videos, puede ayudar a que sea más fácil y amena la instrucción que se le da al estudiante. Con el uso de estas herramientas tecnológicas podemos lograr dividir la técnica a enseñar en partes más pequeñas y precisas, logrando así una mayor atención sobre los elementos más importantes sobre cada paso y el orden en que se deben llevar a cabo. Pozo (2008b) afirma que se deben respetar ciertos principios sobre el diseño instruccional, el cual se sostiene con cuatro fundamentos:

- *Tomar como unidades mínimas componente o destrezas ya dominadas por los aprendices.* Es decir, que se utilicen términos con el cual estén familiarizados la mayoría de los estudiantes. Y de ser necesario descomponer cada una de estas técnicas.
- *La cantidad de elementos que componen la secuencia no debe ser excesiva.* Esto con el fin de que el estudiante no se sienta abrumado al querer memorizar los pasos a realizar.
- *Debe de atraer la atención sobre los rasgos relevantes de cada elemento.* Teniendo en consideración que el alumno no pierda de vista el objetivo a lograr.
- *De ser posible, deben constituir globalmente un esquema o programa de acción congruente con aprendizajes anteriores.* Logrando así que el estudiante vea más allá de cada elemento individual de la secuencia dada.

La práctica de una técnica tiene la finalidad de condensar en una acción todos los pasos, instrucciones y de que se realice de modo automático. Logrando así que los procedimientos, que inicialmente son un saber explícito, pasan a convertirse en representaciones implícitas. Como maestros debemos identificar que el alumno está comprendiendo lo que está haciendo. El maestro es el encargado de supervisar la práctica del estudiante, haciendo así correcciones, retroalimentaciones de la práctica y dando un refuerzo de esta, logrando así que cuando el estudiante realice algún procedimiento por él mismo y sin la ayuda o supervisión de alguien más, éste lo haga de forma correcta y con la mínima cantidad de errores, ya que cuando se realiza una técnica y al estudiante no se le corrija algún error por mínimo que sea lo seguirá haciendo.

Dando un ejemplo de lo anterior, planteemos la situación, cuando en matemáticas a un alumno se le acostumbra a realizar operaciones matemáticas siempre con la misma variable, y cuando se le cambia no sabe como realizarlo o al momento de poner el resultado cambiará la variable a la que está acostumbrado.

Continuando con lo que menciona Pozo (2008b), cuando la técnica ya está completamente entendida por el estudiante, se inicia una tercera fase, la cual es de *perfeccionamiento y transferencia del procedimiento a nuevas situaciones*, donde podemos observar un menor tiempo al momento de realizar un procedimiento o una técnica más limpia. Podemos tener como ejemplo, si tenemos dos estudiantes que deben realizar una integral, la realizará más rápido el alumno que practica que aquel estudiante que no practica.

Debemos considerar que al enseñar técnicas para un aprendizaje, se deben tomar en cuenta las diferentes variables que puedan existir, ya que no siempre se contará con las mismas situaciones. Regresmos al ejemplo de los nadadores, no es lo mismo nadar en una alberca a nadar en un río o mar. Es así que la técnica será eficaz si va acompañada de una estrategia. Eso dará a los estudiantes una mejor respuesta ante las diferentes situaciones que se les lleguen a presentar.

2.1.2.2 Estrategias de aprendizaje

Las estrategias nos permiten tomar decisiones, planificar y controlar las situaciones de acuerdo a las necesidades específicas que se nos presenten en las actividades dadas. Las podemos considerar como procedimientos que se aplican de modo controlado, con el fin de llegar a la meta. Un mismo procedimiento puede usarse de modo técnico o estratégico, dependiendo de las condiciones en que se haga, la diferencia nunca está en lo que se hace, sino en cómo se hace.

La aplicación de una estrategia en determinado dominio requiere de conocimientos temáticos sobre el área al que se aplicará la estrategia. Dichos conocimientos deben incluir tanto información verbal y conocimiento conceptual o comprensión del área. Mientras mayor sea el grado de nuestra comprensión de ese dominio, cuanto más elaborados y explícitos sean nuestros conceptos, el éxito de la estrategia será mayor.

Debemos apoyar y motivar a nuestros estudiantes a ir más allá de las fronteras del aprendizaje, confiar en ellos y ayudarles a tener confianza en sí mismos. La estrategia de aprendizaje como menciona Pozo (2008b) requiere de tres tareas esenciales:

- *Selección y planificación de los procedimientos más eficaces de cada caso.*
- *Control de su ejecución o puesta en marcha.*
- *Evaluación del éxito o fracaso obtenido tras la aplicación de la estrategia.*

Los estudiantes deben aprender a controlar y regular sus procesos cognitivos, así como adaptarse a su propio conocimiento. Deben ser capaces de reunir toda la información necesaria para hacer su propio conocimiento.

Pozo (2008b) nos menciona que a las estrategias de aprendizaje se aplican los mismos principios y fases del entrenamiento estratégico general.

Observando el aprendizaje de procedimientos, desde un punto de vista constructivista, se puede basar como una estrategia general (Díaz et al., 2015). Ya que este tipo de aprendizaje requiere de instrucciones y la relación del sujeto con su entorno.

Mediante el uso de aprendizajes verbales y procedimentales en este trabajo se propone una propuesta didáctica para la enseñanza del binomio de Newton para la educación media superior, y así poder obtener resultados de aprendizaje de conceptos, técnicas y estrategias de aprendizaje.

2.2. Teorías de Aprendizaje

Tomando en cuenta lo que se menciona al principio, consideramos un aprendizaje constructivista para la enseñanza del teorema del Binomio de Newton, centrándonos en un aprendizaje verbal y procedimental.

El constructivismo propone un modelo en donde el proceso de enseñanza se lleva a cabo y se percibe como una serie de cambios de forma dinámica, participativa e interactiva del estudiante con el lo que se tiene que aprender, de modo que el conocimiento que se vaya adquiriendo a lo largo del aprendizaje sea auténtico y manejado por la persona que lo aprende. Esta teoría destaca como objetivo principal que el conocimiento es activamente construido por el sujeto, conocimiento que es una construcción del ser humano diferente para cada persona, partiendo de las ideas previas para generar una nueva idea. Teniendo en relación procesos de adaptación, acomodamiento, asimilación y equilibrio del nuevo conocimiento (Granja, 2015, Pág. 96).

Los individuos son capaces de crear nuevos conocimientos mediante la reflexión sobre sus acciones físicas y mentales. Este proceso de construcción del conocimiento conlleva conflictos cognitivos, reflexión y reorganización conceptual. Tres grandes representantes del constructivismo son Ausubel, Piaget y Vygotski, ya que sus teorías se consideran de las más cercanas a lo que plantea el constructivismo.

2.2.1. Ausubel. Aprendizaje Significativo

La teoría sobre el aprendizaje significativo, habla de que el aprendizaje del alumno depende de ideas previas sobre determinados temas así también como su organización. Ausubel et al. (1976) destaca en su teoría que el aprendizaje que el alumno posee con anterioridad es de vital importancia para lo que se le enseñará al estudiante, ya que las experiencias y conocimientos previos pueden llegar a influir en los futuros aprendizajes. Mencionando a Ausubel et al. (1976):

"Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría este: El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averíguese esto y enséñese consecuentemente"

Para poder llevar a cabo un aprendizaje significativo Ausubel et al. (1976) menciona que se necesitan tres elementos esenciales :

- **Lógicos:** Se refiere a que el material de aprendizaje que tiene que aprender el estudiante sea significativo, es decir que el alumno lo pueda relacionar fácilmente con los conocimientos previos que este tenga.
- **Cognitivos:** Aquí es donde se presta atención en las habilidades que tiene el alumno para procesar el entendimiento y la información que se le está dando. El aprendizaje puede ser el mismo para diferentes sujetos.
- **Afectivos:** Hace referencia a la forma en que el alumno se relaciona con el nuevo conocimiento de forma sustantiva y no al pie de la letra, es decir que aplique el conocimiento para solucionar diferentes situaciones porque sabe y entiende cómo resolverlas y no por la memorización de estos.

2.2.2. Piaget. Teoría de Desarrollo Cognitivo

A esta teoría también se le conoce como evolutiva ya que lleva un proceso tardado y progresivo que avanza conforme el niño se va desarrollando a lo largo de los años. Piaget propuso esta teoría centrada en el desarrollo natural del niño utilizando conceptos psicológicos, como lo son:

- **Asimilación:** Que es la incorporación de objetos del mundo exterior en esquemas mentales anteriores.
- **Acomodación:** Son las modificaciones de los sistemas de asimilación por influencia del mundo exterior.

Piaget sustenta su teoría en que el proceso de maduración biológica lleva al desarrollo de estructuras cognitivas de mayor complejidad, lo que hace más fácil la relación del individuo con el ambiente en el que se desenvuelve, dando como resultado de ésta mejor adaptación un mayor aprendizaje (Granja, 2015, Pág. 98). De manera simultánea todo el conocimiento que el sujeto puede llegar a construir está relacionado con los conocimientos anteriores que tiene; Piaget se centra en cómo se construye el conocimiento partiendo desde la interacción con el medio y de los medios que dispone, con esto se puede sostener que, para el constructivismo, el sujeto construye con firmeza su crecimiento personal (Araya et al., 2007, Pág. 84).

2.2.3. Vygotski. Teoría Sociocultural

La teoría de Vigotski, nos habla de que el conocimiento que adquiere el sujeto se relaciona con la relación de éste con el medio y que la ausencia de uno de los dos, ya sea el sujeto o el medio, el hombre no podrá formar un conocimiento. Es decir, el hombre se debe formar en contacto con la sociedad. De forma que el individuo sabe quien es para poder contribuir en la sociedad a la que pertenece (Granja, 2015, Pág. 99). Vygotski sustenta su teoría en la:

- Zona Proximal: Es el espacio entre lo que el sujeto puede aprender por si solo y lo que aprendería con el apoyo de un experto en el tema.

Esta zona es de suma importancia, ya que es aquí en donde se llevará a cabo el aprendizaje de nuevas habilidades. Vygotski se centra en cómo el medio social permite una reconstrucción interna.

La vista constructivista desde el punto de vista de Vygotski, se mantiene en que la creación del conocimiento se debe a las experiencias que el individuo comparte de forma individual. Ya que las relaciones entre el sujeto y el medio ambiente aumentan la posibilidad de nuevos conocimientos, por lo tanto es importante la relación sujeto y medio ambiente (Araya et al., 2007, Pág. 91).

Tomando en cuenta lo que mencionan Ausubel, Piaget y Vygotski sobre sus teorías, podemos decir que la realidad social juega un papel importante en la determinación de la actividad intelectual. Sus teorías relacionan los fenómenos sociales y cognitivos, a través de la interacción social, ya que los individuos crean las interpretaciones de las situaciones, resuelven propios conflictos, toman una u otra perspectiva y comparten los conocimientos aprendidos.

Basarse en un enfoque constructivista para la enseñanza nos puede dar ciertos beneficios, como el que el estudiante aprenda y disfrute más el aprendizaje ya que se ve involucrado en él, otro punto importante es que se concentra en el pensamiento crítico y entendimiento en lugar de sólo memorizar. Y es más sencillo que el estudiante pueda relacionar los temas aprendidos dentro del mundo real en alguna situación.

2.3. Herramientas didácticas

2.3.1. Historia como recurso didáctico

Las matemáticas y la historia suelen ser de las materias de menor agrado entre los estudiantes de bachillerato, en el caso de las matemáticas porque no entienden los procedimientos matemáticos y tienen que recurrir a la memorización de fórmulas para resolver distintos problemas, en comparación con la historia donde no tienen que recurrir a la solución de problemas pero si a la memorización de datos que es lo que normalmente piden los maestros a los alumnos.

Hablar de una mezcla entre la historia y las matemáticas no es algo muy común de escuchar y tampoco algo que suela aplicarse en clases de matemáticas a nivel bachillerato. La historia como un recurso de enseñanza para las matemáticas puede ser algo realmente benéfico para los estudiantes.

El trabajo de Rodríguez and Sandoval (2016), "La historia como una herramienta didáctica para la enseñanza del concepto de la integral", cita el artículo de Haverhals (2010) "The History of Mathematics as a Pedagogical Tool: Teaching the Integral of the Secant via Mercator's Projection", como punto de partida sobre como se hace uso de la historia como una herramienta para la enseñanza y aprendizaje del cálculo,

mencionando también una recopilación de distintos autores que hablan sobre la aplicación de la historia para la enseñanza de las matemáticas.

La utilización de la historia dentro de las clases de matemáticas no es limitada menciona Haverhals (2010) por lo mismo varios autores muestran algunos beneficios de emplear la historia dentro del aula, por ejemplo:

- Intensifica las habilidades de los alumnos en la resolución de problemas.
- Establece una base para mejorar la comprensión de los temas.
- Logra que los estudiantes realicen conexiones con las matemáticas.
- Muestra la interrelación de las matemáticas con la sociedad.
- Crece la motivación de los estudiantes.
- Reduce el miedo que tienen los alumnos hacia las matemáticas, al demostrar que las matemáticas son una creación humana y que sus creadores lucharon para resolverlo.

Aunque se mencionen distintos puntos a favor, acerca de utilizar la historia dentro del aula, es complicado saber cómo empezar a introducirla y que tenga una buena aceptación por parte de los alumnos. Haverhals (2010) menciona tres formas de cómo emplear la historia dentro del aula:

- Exposición anecdótica que incluya lo visual, como fotos, y los hechos, como logros.
- Aportaciones de material anecdótico, mediante las referencias históricas dentro del aula.
- Estudios determinados de los temas a ver en el aula.

Aunque el uso de la historia dentro del aula en las clases de matemáticas cuente con un gran soporte, rara vez se aplica para la enseñanza de las matemáticas, esto se debe a que tiene factores desfavorables y esto no ayuda para su utilización en el aula.

Empezamos con los factores que están vinculados a cuestiones filosóficas, como son la naturaleza de las matemáticas y la enseñanza de éstas, ya que muchos profesores tienen una imagen de cómo deben ser enseñadas las matemáticas. Algunas ideas presentes en los docentes son las siguientes:

- No hay tiempo suficiente para verlo en clase.
- Así no se enseñan las matemáticas.
- Se debe hacer rutina la solución de ejercicios difíciles, no el recordar datos históricos.

Se debe dar la oportunidad a los alumnos que formen su propio concepto sobre las matemáticas, de manera que construyan su conocimiento a base de la investigación y no que sólo la vean como materia en la que tienen que memorizar fórmulas para resolver problemas.

Es importante que el docente elimine las ideas anticuadas acerca de que utilizar la historia no tiene que ver con la enseñanza de las matemáticas, de lo contrario nos podemos enfrentar con la parte negativa que muestran los alumnos al querer tocar ciertos temas de historia en una clase de matemáticas. Usualmente los alumnos relacionan la historia con cosas aburridas o que no son importantes para ellos, por lo tanto la combinación de algo tedioso con algo complicado no parece ser una buena idea. Convirtiéndose así, matemáticas e historia, las materias que odian.

Como docentes podemos tener cierta incertidumbre sobre la enseñanza de la historia, incluso en aquellos que deseen incluirla para la enseñanza de las matemáticas, Rodríguez and Sandoval (2016) menciona cuales son algunos de los topes con los que nos podemos enfrentar cuando se enseña la historia de las matemáticas, que son:

- ¿Cómo plantear preguntas sobre historia en un examen de matemáticas?.
- Hablar de historia puede llegar a confundir a los alumnos en lugar de ayudarlos.
- Lo complicado de leer textos originales y/o que las traducciones no sean claras

No solo podemos encontrar dificultades al momento de enseñar historia de las matemáticas, también debemos tomar en cuenta un punto importante que es la planeación de la clase. Ya que se deben tener en cuenta varios puntos de vista, como lo vimos con Pozo (2008b), no todos los alumnos tienen la facilidad de un aprendizaje verbal sino que son más de aprendizajes procedimentales. Además hay que destacar que la mayoría de los textos matemáticos originales son complicados incluso para estudiantes de matemáticas, por lo que el docente debe buscar la forma de digerir lo mejor posible estos textos para la comprensión de los alumnos.

No existe una evidencia confirmada que diga que los alumnos aprenden mejor las matemáticas cuando se les enseña la historia de las matemáticas dentro del aula, pero se puede conseguir que el alumno cambie su punto de vista a las matemática e historia logrando así que el alumno se sienta motivado para sus clases de matemáticas.

2.3.2. Aprendizaje basado en problemas

El método del aprendizaje Basado en Problemas (ABP) se origina en la escuela de medicina en la Universidad de Case Western Reserve en los Estados Unidos y en la Universidad de McMaster en Canadá en la década de los 60's. En el artículo de Morales Bueno and Landa Fitzgerald (2004) mencionan que esta metodología se

desarrolló con el objetivo de mejorar la calidad de la educación médica, pero con el paso del tiempo esta fue adaptándose a distintas áreas de la educación. De manera que la orientación de un currículum que se basaba en una educación tradicional, fuera a uno más integrado y organizado en problemas de la vida real y donde se junten las diferentes áreas del conocimiento que se ponen en juego para dar solución al problema.

El ABP se sustenta en el enfoque de la teoría constructivista, y está fundamentada en tres principios básicos:

- El entendimiento con respecto a una situación de la realidad surge de las interacciones con el medio ambiente.
- El conflicto cognitivo al enfrentar cada nueva situación estimula el aprendizaje.
- El conocimiento se desarrolla mediante el reconocimiento y aceptación de los procesos sociales y de la evaluación de las diferentes interpretaciones individuales del mismo fenómeno.

Para lograr los objetivos planteados por el docente y pensando utilizar el ABP, es esencial que su planeación garantice el interés de los alumnos, que tenga que ver con los temas a tratar en el curso y con situaciones de la vida diaria, de forma que los estudiantes puedan tomar las mejores opciones para resolver los problemas propuestos. Dentro de las bases de ABP se tienen como bases algunas teorías de aprendizaje, aquí retomamos lo que menciona Granja (2015) sobre la teoría de Vigotsky, el aprendizaje es considerado como una actividad social. En este caso vendría siendo la relación que tiene los alumnos, cuando intercambian ideas o aportan algo para la solución de algún problema. Para lograr esto es importante que el docente promueva el diálogo entre sus estudiantes.

La teoría de Piaget, nos dice que los aprendizajes más significativos se producen como consecuencia del conflicto cognitivo, Araya et al. (2007) nos dice que esta teoría es evolutiva y que lleva un proceso tardado y progresivo. La teoría de Piaget nos dice que si al sujeto no se le presenta una situación de desequilibrio y sus pensamientos no entran en conflicto, es muy poco probable que el sujeto tenga interés en encontrar una solución, hacer preguntas, investigar, decir y aprender. El conflicto cognitivo se transforma en algo necesario para lograr aprendizajes significativos.

Hasta el momento sabemos que en la educación tradicional la mayoría de los estudiantes se encuentran desmotivados y siguen procesos de memorización de una gran cantidad de información, la mayoría de ella irrelevante en situaciones reales fuera de la escuela lo que nos lleva a la falta de interés por parte de los alumnos, presentando dificultades al asumir responsabilidades correspondientes a sus cargos y con problemas al realizar trabajos de forma colaborativa.

Estamos acostumbrados a que el docente explica cierto tema y a continuación deja a los alumnos actividades de los contenidos que se vieron en clase, a diferencia del aprendizaje basado en problemas el cual busca que los alumnos adquieran conocimientos y los apliquen en situaciones de la vida real sin que el docente sea

quien termine solucionando los problemas. Para tener más claro las diferencias entre un aprendizaje tradicional y el ABP se presenta el cuadro 2.3.1 con las principales diferencias.

Aprendizaje Tradicional	Aprendizaje Basado en Problemas
El profesor asume el rol de experto o de autoridad formal.	Los profesores tienen el rol de facilitador, tutor, guía, coaprendiz, mentor o asesor.
Los profesores transmiten la información a los alumnos.	Los alumnos son responsables en su proceso de aprender y crear alianzas con los alumnos.
El profesor presenta el contenido de sus asignaturas en exposiciones magistrales.	Los alumnos localizan recursos y los profesores guían en este proceso.
Los alumnos son vistos como “recipientes vacíos” o receptores pasivos de información.	Los alumnos son vistos como sujetos que pueden aprender por cuenta propia.
La comunicación es unidireccional.	Los profesores diseñan su curso basado en problemas abiertos.
Los alumnos absorben, transcriben, memorizan y repiten la información para actividades específicas como pruebas o exámenes.	Los estudiantes participan activamente, en identificación y solución de problemas.
La evaluación es sumatoria. El único evaluador es el docente.	Los estudiantes evalúan su proceso y el de los demás.

Cuadro 2.3.1: Diferencia entre el aprendizaje tradicional y aprendizaje basado en problemas

Como mencionan Morales Bueno and Landa Fitzgerald (2004) el propósito de este modelo es promover el desarrollo intelectual, científico, cultural y social, ya que sus procedimientos ayudan a que el estudiante aprenda a aprender. No existe una serie de pasos que se tenga que seguir para la planeación de un aprendizaje basado en problemas, pero debemos tener en cuenta lo siguiente:

- Número de alumnos
- Tiempo disponible
- Objetivos a lograr del curso
- Bibliografía disponible
- Recursos del docente
- Que los problemas deben conectar con conocimientos anteriores y nuevos

- Forma de evaluar (Individual, en equipo, del compañero y autoevaluación)

Si se llega a tener una buena planeación de un aprendizaje basado en problemas, se espera que los resultados sean satisfactorios. Pero también debemos considerar la forma en que los alumnos abordarán dicha metodología, y los pasos que ellos sigan para darle solución a los problemas. Por esa razón Morales Bueno and Landa Fitzgerald (2004) presentan una secuencia de pasos ideales que deberían seguir los alumnos:

- Leer y analizar el escenario del problema.
- Realizar una lluvia de ideas.
- Hacer una lista de aquello que se conoce.
- Hacer una lista de aquello que se desconoce
- Hacer una lista de lo que se necesita hacer para resolver el problema
- Definir el problema
- Obtener información
- Presentar resultados

El aprendizaje basado en problemas facilita la comprensión de los nuevos conocimientos, lo que resulta indispensable para lograr aprendizajes significativos, debe buscar desafiar a los alumnos de forma que logren colaborar entre ellos sin que se dividan el trabajo y obligándolos a encontrar la solución del problema a diferencia de la educación tradicional donde es muy fácil que los alumnos se den por vencidos y sea el docente quien de la solución del problema.

2.4. Secuencia Didáctica

El planear las clases de un curso escolar no es solo planear por planear, aquí es donde debemos recurrir a lo que se le conoce como secuencia didáctica, en el artículo de Valdivia and Pérez (2007) nos mencionan que una secuencia didáctica debe orientar y facilitar el desarrollo práctico. Y en esta se da por entendido que se tiene que adaptar a una situación real. Uno de los propósitos de la secuencia didáctica es evitar la improvisación por parte del docente así como de los alumnos dentro del salón de clases. También mencionan que es útil para analizar e investigar sobre las prácticas educativas.

Cuando realicemos una secuencia didáctica, tenemos que considerar las diferentes competencias que se van a abordar, de acuerdo con Tobón et al. (2010) primero debemos determinar las competencias específicas y posteriormente las genéricas o transversales. Estas competencias pueden cambiar dependiendo el país en el que nos encontremos, en México por ejemplo podemos encontrar:

- Genéricas (Transversales)
- Disciplinares (Específicas)
- Profesionales (Específicas para el desempeño profesional)
- Para la vida (Genéricas)

Dentro de nuestra planeación de actividades hay que considerar distintas estrategias didácticas que nos faciliten el lograr los objetivos planteados, no todas las secuencias didácticas tienen que ser iguales, sino que debemos optar por la estrategia que mejor se adapte a nuestras competencias, asignaturas y estudiantes.

La secuencia didáctica nos da la posibilidad de organizar todo el contenido de un curso escolar, sobre las actividades que se tienen planeadas realizar y la forma de como se llevarán a cabo clases y actividades. La guía de Díaz-Barriga (2013) dice que debemos tener ciertas consideraciones en la apertura, desarrollo y cierre de las secuencias didácticas, ya que no se puede limitar a simplemente llenar espacios en blanco. Por lo tanto debemos tener en cuenta ciertos elementos esenciales que debe incluir una secuencia didáctica, es por eso que Díaz-Barriga (2013) menciona cuales son:

- Asignatura, unidad temática dentro del curso en general y tema general
- Contenidos
- Duración de la secuencia y número de sesiones previstas
- Nombre del profesor que elaboró la secuencia
- Finalidad, propósitos u objetivos
- Elección de actividades o proyectos
- Orientaciones generales para la evaluación
- Líneas de secuencias didácticas (Apertura, desarrollo y cierre)
- Línea de evidencias de evaluación del aprendizaje
- Recursos

Poniendo atención en los elementos principales para una secuencia didáctica encontramos dos líneas, que son donde podremos obtener los resultados de los alumnos, estas líneas nos servirán para futuras planeaciones ya que nos aportarán los antecedentes de como trabajan los alumnos.

2.4.1. Líneas de Secuencias Didácticas

En esta línea es donde podemos encontrar las tres actividades más importantes de nuestra planeación, las cuales son:

- Apertura
- Desarrollo
- Cierre

Cada una de estas es parte fundamental, ya que es aquí donde podemos observar los avances, las dificultades y los conocimientos de nuestros alumnos. Por lo tanto es importante conocer a que se refieren cada una de estas.

2.4.1.1 Apertura

Se refiere a la forma en como empezaremos con nuestra clase, es muy común que el docente se presente frente a los alumnos y dice el nombre del tema que verán y procede a explicarlo. Pero en la secuencia didáctica no necesariamente tiene que ser de la forma tradicional, la apertura se puede presentar de distintas formas, aquí podemos recurrir a distintos recursos (internet, redes sociales, libros, revistas, etc.), puede ser dejando a los alumnos que realicen una investigación previa, que vean algún video o documental, que lean alguna revista e incluso ir a ciertos lugares y hacer entrevistas o visitas.

Esto nos ayudará a que el alumno tenga cierto conocimiento previo del tema que se verá en la clase y este se empiece hacer ideas de lo que trata, así será más fácil la comprensión de ciertos temas, además que no necesariamente se tiene que realizar individualmente sino que también puede ser una actividad grupal, de esta manera fomentar el trabajo en equipo. Otro punto a favor es que también como docentes podemos darnos cuenta del interés del alumno en la materia.

2.4.1.2 Desarrollo

Es en esta parte donde se le explican al estudiante los temas y adquiere el conocimiento necesario, es aquí donde tiene que relacionar lo aprendido en la apertura y darle sentido a esa información. La forma en que el docente explica el tema puede ser de distintas formas, ya sea como una exposición normal, puede utilizar los libros de texto o libros relacionados con el tema e incluso recurrir a las TIC. De esta manera tener un amplio campo de información y que el tema quede mejor explicado para los alumnos.

En el desarrollo es donde deben ser contestadas las dudas que surgan en los alumnos, para que cuando realicen las actividades tengan las menores dudas posibles y dependiendo del criterio que tenga cada docente, en esta etapa es donde se irán formando las evidencias para un portafolio de actividades o evidencias de

aprendizaje, para tomar en cuenta en la evaluación final. Las actividades que tengan que hacer los alumnos son para realizar en el salón de clases y/o en casa. De acuerdo con Díaz-Barriga (2013) las tareas que sean dejadas a los alumnos no se deben restringir solamente a ejercicios de rutina o con poco significado, deben ser actividades que reten y motiven a los alumnos. Aquí es donde podemos recurrir al ABP, integrando ejercicios o problemas que se relacionen con la vida real.

Los ejercicios que se relacionen con situaciones reales, nos dan puntos importantes sobre cómo el alumno está procesando la información y la forma en que aplica los conocimientos adquiridos.

2.4.1.3 Cierre

El propósito que tiene esta etapa es hacer una asimilación de todo lo que el alumno fue aprendiendo, desde las actividades de apertura y las actividades llevadas a cabo durante el desarrollo, esta etapa no necesariamente tiene que ser por un trabajo, sino puede ser una actividad grupal donde entre todos comenten lo aprendido o lo que pensaban que era y lo que en realidad era. También se puede realizar algún proyecto más elaborado donde el alumno demuestre los conocimientos adquiridos; dependiendo del profesor las actividades realizadas en esta etapa también las pueden agregar como evidencias de aprendizaje.

Las actividades de cierre nos darán la pauta para saber si podemos continuar con otro tema o hay que reforzar el conocimiento que se acaba de enseñar a los alumnos, eso lo sabremos por las dificultades que vayan mostrando o diciendo los alumnos.

2.4.2. Líneas de Evidencias de Evaluación del Aprendizaje

Esta etapa depende mucho del criterio del docente, ya que puede simplemente evaluar con las evidencias de aprendizaje o recurrir a un examen, que es la evaluación que normalmente se hace; el docente debe saber si la evaluación la realizará al término del tema, del curso, cada dos meses o cada mes. Por esa razón la evaluación debe ser más considerada por cada docente, y también debe considerar cuáles eran los objetivos del curso.

La evaluación final o evaluación sumativa como menciona Díaz-Barriga (2013), debe ser el resultado de la incorporación de distintas evidencias e incluso exámenes (tomando en cuenta que no deben exceder el nivel de dificultad de lo visto en clase), no olvidando que todo lo que se evalúe debe estar relacionado con los objetivos y propósitos del curso, la evaluación sumativa no debe tratar sobre una calificación final sino sobre el proceso de aprendizaje donde se combinan habilidades y estrategias para lograr una meta.

El ABP toma un lugar importante en esta línea, como mencionan Morales Bueno and Landa Fitzgerald (2004) los ejercicios que se relacionan con situaciones reales dan mejores resultados, por lo que sería muy benéfico integrar la metodología de ABP en la secuencia didáctica.

Como docentes debemos tener en cuenta que dentro del aula no sólo tenemos que enseñar a los alumnos conocimientos de nuestras materias, sino también debemos enseñarles a trabajar en equipo, a ser responsables, ser organizados, valores, actitudes y habilidades para que se puedan desarrollar por sí mismos. Esto lo podemos tomar en cuenta dentro de nuestras evaluaciones.

Capítulo 3

Marco Teórico Disciplinar

En el siguiente capítulo nos adentramos en nuestro tema principal, el Binomio de Newton, partiendo por sus orígenes, la mención que tiene en los libros de texto en el nivel medio superior y las aplicaciones que tiene.

3.1. Historia del Binomio de Newton

Tomando en cuenta el trabajo de Cohecha Torres (2014), nos apoyaremos en su reseña histórica sobre el Binomio de Newton, partiendo desde sus inicios en el siglo IV antes de Cristo y terminando en el siglo XV al XVIII.

3.1.1. Babilonia (2000 a.C. al 1600 a.C.)

Comenzamos con los babilonios, sus documentos matemáticos apuntan al tercer milenio a.C., en los cuales podemos encontrar una escritura cuneiforme y un sistema numérico sexagesimal tendiendo ligeras mezclas con el sistema decimal. Sus matemáticas en su mayoría eran aritmética y con cierta atracción en medidas y cálculos geométricos, donde todo se basaba en la prueba y error con apoyo en la experiencia práctica, no mencionando una demostración clara o formal.

Los conocimientos de los babilonios acerca de las matemáticas quedó grabado en tablillas de arcilla, algunas de estas tablillas fueron recuperadas se remontan al año 1800 al 1600 a.C., y en ellas podemos encontrar temas que incluyen fracciones, álgebra, multiplicaciones, métodos para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. En la universidad de Yale podemos encontrar la tablilla YBC 7289 donde se menciona una aproximación de la $\sqrt{2}$, que tiene una aproximación de cinco decimales.

Los algebristas babilonios mencionan ante los números irracionales en sus tablas y ecuaciones que no todos los números racionales que tenían en ellas tenían una raíz cuadrada tabulada, por esa razón para obtener valores aproximados utilizaron la siguiente regla:

$$(a^2 + b^2)^{1/2} = a + \frac{b^2}{2a} \quad (3.1)$$

Dos mil años después, esta regla, vuelve a resurgir con Herón de Alejandría.

Cohecha Torres (2014) cita a O'Connor and Robertson (1996) quienes escriben sobre la técnica utilizada por los babilonios para la multiplicación de dos números la cual se aplica de forma implícita, y está dada por la expresión:

$$ab = \frac{(a + b)^2 - a^2 - b^2}{2} \quad (3.2)$$

Dicha fórmula se mejora y sólo se requiere de una tabla de cuadrado, posteriormente tomar la diferencia y finalmente encontrar la cuarta parte de la respuesta, donde la fórmula está representada por:

$$ab = \frac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{4} \quad (3.3)$$

3.1.2. Grecia (600 a.C. al 300 d.C.)

Varios elementos que utilizaron los griegos fueron tomados de los babilonios y egipcios, de ahí surge uno de sus aportes más importantes, el descubrimiento de las matemáticas abstractas. Estas tenían sus fundamentos en la estructura lógica, axiomas y en demostraciones. Estos avances datan del siglo VI a.C con los filósofos Tales de Mileto y Pitágoras de Samos; donde este último enseñó la importancia del estudio de los números, gracias a eso se le atribuyen los descubrimientos por partes de sus discípulos sobre la teoría de números y la geometría.

Para el año 300 a.C. Euclides escribió el texto los *Elementos*, que se compone por trece libros, que contienen la mayor parte del conocimiento matemático que existió hasta finales del siglo IV a.C., y abordaba las áreas de:

- Geometría de polígonos y del círculo
- Teoría de números
- Teoría de los inconmensurables
- Teoría elemental de áreas y volúmenes
- Geometría del espacio

En estos libros podemos encontrar los primeros registros del Teorema del Binomio, aunque no se menciona con ese término. En el libro II, *Álgebra Geométrica*, se manejan geométricamente 14 proposiciones y se presenta el desarrollo para $n = 2$ en la proposición 4, menciona que "Si se divide mediante un punto cualquiera una recta dada, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de las partes más el doble del rectángulo que tiene a esas partes como lados". Expresándolo algebraicamente y dando los valores de a y b a los segmentos, tenemos:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (3.4)$$

La proposición 7 del mismo libro, nos muestra la fórmula que corresponde al cuadrado de una diferencia, que menciona *"Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la recta entera y el de uno de los segmentos tomados conjuntamente son iguales a dos veces el rectángulo comprendido por la recta entera y el segmento conocido más el cuadrado del segmento restante"*. De igual forma expresándolo algebraicamente y dando los valores de a y b a los segmentos, tenemos:

$$a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2 \quad (3.5)$$

A partir de la ecuación 3.5 obtenemos que:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (3.6)$$

Es importante mencionar que en la obra de Euclides no se hace mención del binomio al cubo ni la forma de su resultado. También se puede observar que se utilizó el desarrollo del binomio para encontrar resultados aproximados de las raíces de los números.

3.1.3. India Antigua (900 a.C. al 200 d.C.)

Del siglo VIII a.C. y II d.C. se tienen los registros más antiguos de la India, los Sulba Sutras, donde podemos observar los orígenes de las matemáticas por medio de rituales religiosos. Estas se dan a partir de las reglas que se tenían para la construcción de los templos y altares, asimismo se observan métodos aproximados para obtener las medidas del círculo eso dio partida para encontrar aproximaciones de π .

En la India antigua, igualmente se encuentran datos de que lograron obtener la raíz cuadrada de 2 con varias cifras de aproximación. Además del enunciado del teorema de Pitágoras así mismo las ternas pitagóricas.

3.1.4. India Clásica (Hacia 400 - 1600)

El escrito matemático y astronómico llamado *Arybhatiyam* hecho por Arybhata (476 - 550 d.C.), aquí encontramos referencias sobre temas de:

- Álgebra
- Aritmética
- Trigonometría Plana
- Trigonometría Esférica
- Geometría del espacio

Donde podemos identificar uno de sus versos que dice, "Hay que sustraer la suma de los cuadrados del cuadrado de la suma; la mitad de eso es el producto de los factores". Expresándolo algebraicamente, tenemos:

$$ab = \frac{(a + b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} \quad (3.7)$$

Dicho resultado es correcto y para llegar hay que realizar el desarrollo del binomio al cuadrado.

3.1.5. Arabia (Hacia 642 - 1258)

Para la segunda mitad del siglo se origina el conocimiento algebraico con la obra de Al-Khuwarizmi (780-850). De acuerdo con O'Connor and Robertson (1996) las actividades que Al-Khuwarizmi tenía que realizar incluían, la traducción de manuscritos científicos griegos y estudios sobre álgebra, geometría y astronomía. Fue él quien escribió el famoso *Hisab al-jabr w'al-muqabala* que nos habla sobre álgebra y es en este libro donde obtenemos la palabra *álgebra* y se le adjudica el primer libro de esta rama de las matemáticas.

Cohecha Torres (2014) menciona que el texto de Al-Khuwarizmi suministra la información para la solución de ecuaciones polinómicas de segundo grado, mediante el método geométrico, el cual considera que la variable y la constante pertenecen a los lados del rectángulo. Las multiplicaciones de:

- Variable por Variable
- Variable por Constante
- Constante por Constante

Son consideradas como el área de la figura y en la solución de ecuaciones se inicia de un cuadrado, ya sea agregando o sustrayendo las áreas que correspondan y emplear el proceso inverso del binomio al cuadrado (factorización del trinomio). Al-Khuwarizmi emplea sus conocimientos y los utilizó en su trabajo del Teorema del Binomio, coeficientes binomiales y el Triángulo de Pascal. Siguiendo a Cohecha Torres (2014) nos dice que Al-Khuwarizmi tiene dos obras más donde se menciona el Teorema del Binomio, en su obra *Al-Fakhri* podemos encontrar el desarrollo de $(a + b)^3$ y en *Al-Badi* está el desarrollo de $(a - b)^3$ y $(a + b)^4$.

O'Connor and Robertson (1996) exponen que Rashed y Ahmad que según Al-Karaji fue quien construyó el Triángulo de Pascal, dentro de los últimos trabajos de Al-Samawal menciona partes del trabajo de Al-Karaji donde se encuentra la construcción parecía a la del Triángulo de Pascal, sólo que este se contruye a partir de uno de sus lados, dicho triángulo se muestra en la figura 3.1.1.

Continuando con las aportaciones de Arabia, tenemos al matemático Omar Khayyam (1048 - 1122), quien nos aportó grandes avances matemáticos en su libro *Maqalat Phi al-Jabr wa al-Muqabil' on Algebra*, donde muestra el desarrollo de la

Col1	Col2	Col3	Col4	Col5	...
1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	...
	1	3	6	10	...
		1	4	10	...
			1	5	...
				1	...

Figura 3.1.1: Triángulo de Al-Karaji.

expansión binomial donde el exponente es un número entero positivo y aunque no tuvo una ley sobre esto, afirmó que se podía encontrar las raíces para potencias superiores a la tercera a partir de figuras geométricas esto a referencia de lo que actualmente conocemos como el Triángulo de Pascal.

3.1.6. China y el Triángulo de Pascal (500 a.C. al 1300 d.C.)

Siguiendo a Esteve and Vallhonesta (1995) nos hablan acerca del Triángulo de Pascal, que tiene su nombre en honor al matemático Blaise Pascal, quien incluyó el término sobre el triángulo aritmético en su libro *Tratado*. Se le conoce como el Triángulo de Pascal al arreglo en forma triangular de números, los cuales simbolizan los coeficientes binomiales.

Uno de los datos interesantes que menciona Cohecha Torres (2014) acerca del Triángulo de Pascal, son los nombres con los que se les conocía. Pierre Raymond (1708) lo llamaba *Tabla del Sr. Pascal para las combinaciones combinaciones*, pero fue Abraham de Moivre (1730) quien le asignó el nombre de *Triangulum Arithmeti-cum Pascalianum*, que proviene del latín *Triángulo Aritmético de Pascal* fue así que se le dio el nombre por el cual lo conocemos actualmente.

Pascal en su texto definió una matriz en la que el número de cada celda es igual a la suma del número en la celda anterior de la misma columna con el número anterior de la misma fila y teniendo en cuenta que la primera fila y columna están formadas por números 1. A lo que Pascal llamó como una matriz rectangular ilimitada, esto lo podemos observar en la figura 3.1.2.

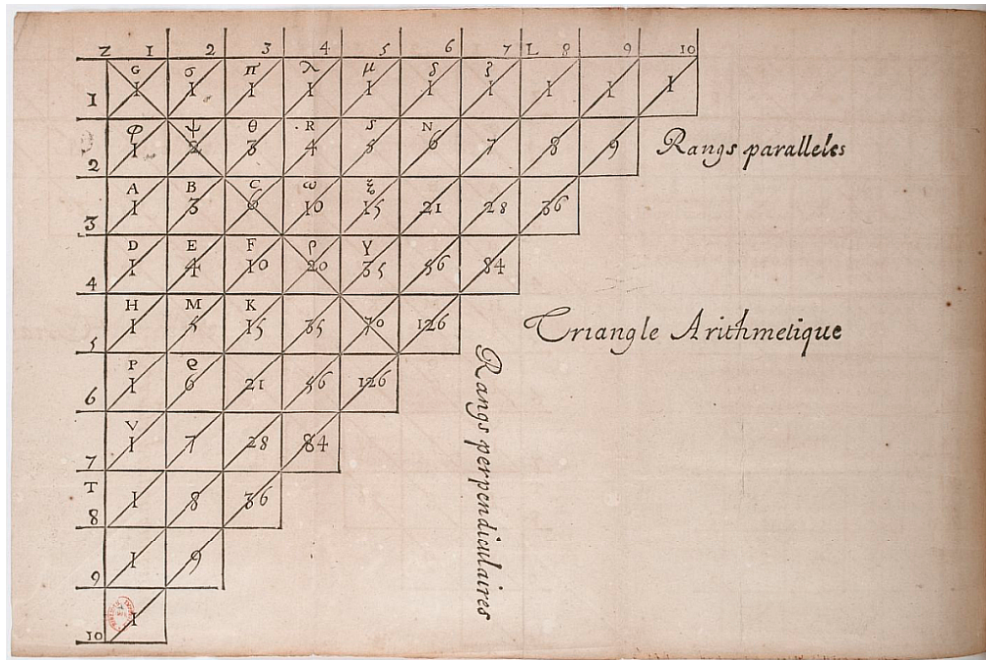


Figura 3.1.2: Triángulo de Pascal original.

Simbólicamente encontramos la definición de Pascal como:

$$f_{i,1} = f_{1,j} = 1, i, j = 2, 3, 4, \dots \quad (3.8)$$

$$f_{i,1} = f_{i-1,j} + f_{i,j-1}, i, j = 2, 3, 4, \dots \quad (3.9)$$

Como hemos visto anteriormente ya se conocían las propiedades y aplicaciones del triángulo pero fue Pascal el que desarrolló muchas de las aplicaciones que tiene y fue el primero en tener la información completa demostrando la relación que tiene con la fórmula del binomio.

Encontramos el primer manifiesto del triángulo de coeficientes en el siglo X, en los textos del *Chandas Shastra*, un libro indio escrito por *Pingala* cerca del año 200 a.C., Cohecha Torres (2014) menciona que respecto a este libro sólo se cuenta con fragmentos, de los cuales se conocen los comentarios realizados por *Halayudha* cerca del año 975. Halayudha, mencionaba que se tenía interés en establecer el número de métricas que tenían n notas largas y k notas cortas, tomándolo semejante a los coeficientes binomiales. También se habla del Triángulo de Pascal, al cual Halayudha se refería a el como *Meru-prastara* (figura 3.1.3) que significa "La escalera al Monte Meru" y dice lo siguiente:

"Dibuja un cuadrado, a partir de la mitad del cuadrado, dibuja otros dos cuadros similares por debajo de él; debajo de estos dos, otros tres cuadrados, y así sucesi-

vamente. En el cuadrado superior se debe comenzar por poner 1. Poner 1 en cada uno de los dos cuadrados de la segunda línea. En la tercera línea poner 1 en los dos cuadrados extremos y, en la casilla central, la suma de los dígitos de los cuadrados situados encima de ella. En la cuarta línea poner 1 en los dos cuadrados extremos, en los del medio poner la suma de los dígitos de los dos cuadrados que está por encima de cada uno, continuar de este modo. De estas líneas, la segunda proporciona las combinaciones con una sílaba, la tercera con las combinaciones de dos sílabas”.

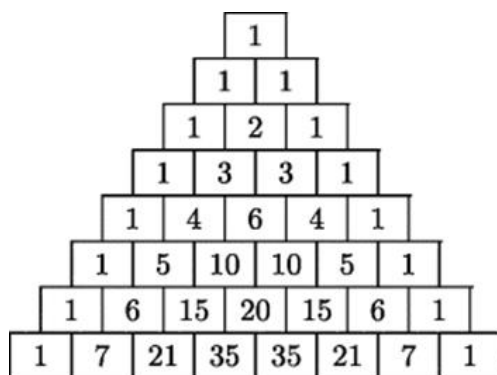


Figura 3.1.3: Representación del Meru-prastara de Halayudha.

Cohecha Torres (2014) nos dice que Al-Karaji (953-1029) y Omar Khayyám (1048-1131) tomaron en discusión las propiedades del triángulo, es por esto que en Irán se le conoce como el triángulo *Khayyám-Pascal* o solamente *Khayyám*.

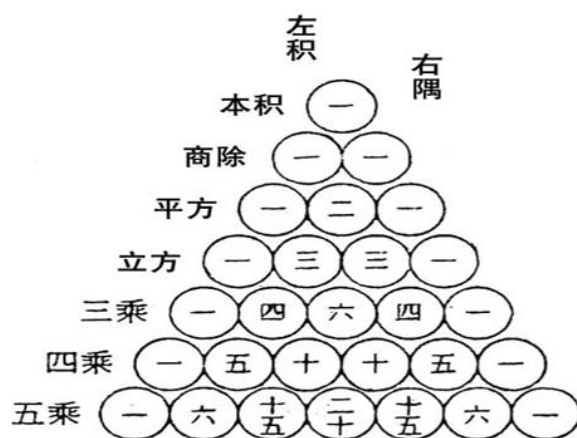


Figura 3.1.4: Triángulo de Jia Xian.

En China cerca del siglo XI ya se tenía conocimiento de este triángulo, Fowler (1996) nos habla acerca del matemático Jia Xian (1010-1070) quien en su libro, *Shi*

Sou Suan Shu, habla acerca del triángulo y la forma en que se lo representó (figura 3.1.4). Pero fue Yan Hui (1238-1298) quien explicó el método de Jia, y citó a Jia al mencionar "Mi método para encontrar raíces cuadradas y cúbicas se basa en el método de Jia Xian en *Shi sou Saun Shu*". Por esta razón en China el triángulo es conocido como *El triángulo de Yang Hui* (figura 3.1.5).

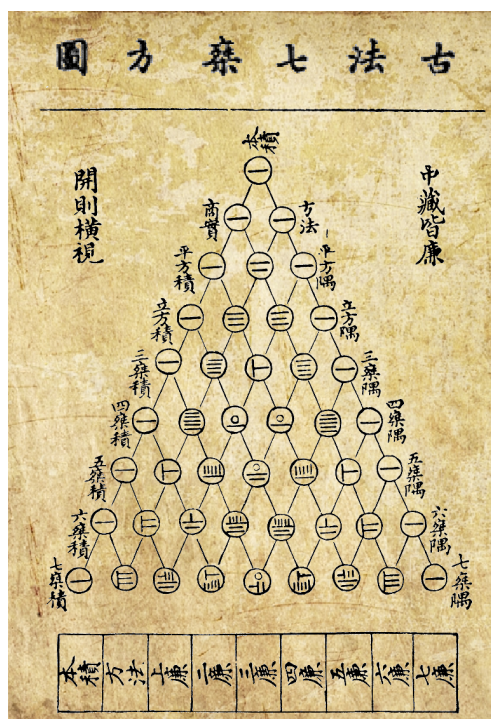


Figura 3.1.5: Triángulo de Yan Hui.

En el libro de Chu Shi-Chieh, *Espejo precioso de los cuatro elementos* (Ssu Yuan Yu Chien), de 1303. Podemos encontrar el triángulo de Yan Hui en la portada y no precisamente porque Chu sea el autor del triángulo, de acuerdo con Cohecha Torres (2014) en el diagrama del triángulo se vislumbran los coeficientes para el desarrollo del binomio hasta la octava potencia; Chu se refiere al triángulo como *diagrama del viejo método para hallar potencias octavas e inferiores*.

En China, el surgimiento del Teorema del Binomio para potencias enteras positivas fue principalmente por la extracción de raíces que por el cálculo de potencias.

3.1.7. Europa y el Triángulo de Pascal

Los primeros registros que se tienen sobre el triángulo, siguiendo a Cohecha Torres (2014) citando a Smith (1958), se presenta en Europa por Petrus Apianus (1495-1552) quien publica su libro *Cálculos Comerciales* (figura 3.1.6) en 1527 y en el

frente de éste se puede apreciar el triángulo.



Figura 3.1.6: Frente del *Cálculos Comerciales*

Continuando con Smith (1958) quien nos habla sobre el *Triángulo de Tartaglia* que fue nombrado así por el italiano Niccoló Fontana (1499-1577) quien fue un algebrista y era apodado Tartaglia, Niccoló escribe su libro titulado *Trattato* en 1556, donde hace referencia al descubrimiento del triángulo aritmético y al desarrollo del binomio.

Antes de la publicación del *Trattato* en 1544 fue publicado el libro *Arithmetica Integra* por el monje alemán Michael Stifel (1487-1567), en donde se incluyeron conceptos básicos de álgebra utilizando símbolos alemanes para potencias de los exponentes negativos desconocidos, fue así como presentó el Triángulo de Pascal (un siglo antes que Pascal) utilizando esto como una herramienta para obtener las raíces de números.

Encontramos también a James Gregorio, quien fue el primer escritor en aproximarse al desarrollo del binomio con potencias en fracciones y dió su fórmula en 1670. Para llegar a dicha fórmula utilizó un método aproximado obteniéndolo indirectamente, por querer encontrar un antilogaritmo.

Además de los autores ya mencionados Cohecha Torres (2014), menciona que

hay otros que de igual manera escribieron sobre el triángulo aritmético y varios siglos antes que Pascal. Como es el caso de Viète (1540-1603), Stevin (1625) o Herigone (1634), y es por esta razón que para Boyer (1996) sea inadecuado el nombre del *Triángulo de Pascal*.

3.1.8. Newton y el Teorema del Binomio

Isaac Newton (1642-1727) es conocido por sus grandes aportes en la física y en las matemáticas. Muchos de sus avances en estas ciencias fueron gracias a grandes genios de su época en quienes pudo tener un sustento o base para sus descubrimientos, es de ahí donde se le conoce su famosa frase "*Si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes*". Cohecha Torres (2014) nos menciona que uno de los grandes que estudió Newton fue John Wallis, del quien utilizó su Aritmética como base para sus investigaciones sobre las series infinitas, el Teorema del Binomio y algunas cuadraturas.

Para el año 1664 Newton descubre el desarrollo de binomio, se muestra evidencia de esto en dos cartas, la *Epístola prior* de junio y la *Epístola posterior* de octubre, ambas cartas del año 1676. Dichas cartas fueron enviadas a Henry Oldenburg quien era el secretario de la *Royal Society of London*, para que las compartiera con Leibniz; después de esto aparece publicado por primera vez en el *Tratado de Álgebra* de Wallis en 1685 y en donde se le atribuía a Isaac Newton este descubrimiento.

Newton nos dice "*La extracción de raíces cuadradas se simplifica con este teorema, donde A, B, C, D ... son los términos inmediatos que les preceden en el desarrollo*"

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \dots \quad (3.10)$$

De acuerdo a lo anterior, nos da a entender que los coeficientes están dados de la siguiente manera:

$$A = P^{\frac{m}{n}} \quad (3.11)$$

$$B = \frac{m}{n}AQ = \frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q \quad (3.12)$$

$$C = \frac{m-n}{2n}BQ = \frac{m-n}{2n}\left(\frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q\right)Q = \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}P^{\frac{m}{n}}Q^2 \quad (3.13)$$

$$D = \frac{m-2n}{3n}CQ = \frac{m-2n}{3n}\left(\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}P^{\frac{m}{n}}Q^2\right)Q = \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{3 \cdot 2}P^{\frac{m}{n}}Q^3 \quad (3.14)$$

⋮

Ahora, si son reemplazados los coeficientes de la ecuación 3.10 tenemos:

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = (P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} P^{\frac{m}{n}} Q + \frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n} - 1)}{2} P^{\frac{m}{n}} Q^2 + \frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n} - 1)(\frac{m}{n} - 2)}{3 \cdot 2} P^{\frac{m}{n}} Q^3 + \dots) \quad (3.15)$$

Aplicando factorización y sustitución respectivamente en la ecuación 3.15 tenemos:

$$P^{\frac{m}{n}} (1 + Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} (1 + \frac{m}{n} Q + \frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n} - 1)}{2} Q^2 + \frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n} - 1)(\frac{m}{n} - 2)}{3 \cdot 2} Q^3 + \dots) \quad (3.16)$$

$$(1 + Q)^{\frac{m}{n}} = (1 + \frac{m}{n} Q + \frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n} - 1)}{2} Q^2 + \frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n} - 1)(\frac{m}{n} - 2)}{3 \cdot 2} Q^3 + \dots) \quad (3.17)$$

En donde podemos observar que la ecuación 3.17 es familiar y usada actualmente.

Como hemos observado por la investigación de Cohecha Torres (2014) el desarrollo del binomio para enteros positivos ya era conocido desde hace tiempo, sin embargo el interés del descubrimiento de Isaac Newton entra en el uso para exponentes negativos y fraccionarios y en una suma infinita en lugar del desarrollo infinito, lo que podríamos describir actualmente como:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (3.18)$$

Tomando en cuenta que a , b y n pueden ser cualquier número real y en donde los coeficientes, también llamados coeficientes binomiales, están dados por la siguiente fórmula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} \quad (3.19)$$

Donde $n!$ significa el factorial de un número natural y está definido como:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n(n-1)! & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \quad (3.20)$$

De acuerdo con Cohecha Torres (2014), quien nos menciona que Newton en realidad no dio una demostración precisa del teorema, más bien llegó a la formulación de éste después de sus investigaciones sobre el cálculo de áreas bajo la curva con ordenadas que tenían la forma $(1 - x^2)^n$.

Isaac Newton al darse cuenta que la fórmula del binomio la podía extender a cualquier exponente racional, obtiene una importante ayuda para su formulación del

cálculo infinitesimal, logrando así hacer desarrollos en serie de funciones, generalizando operaciones con series de potencias, derivar e integrar funciones racionales y obteniendo la cuadratura de algunas curvas, por ejemplo la *cicloide*. Newton además concluyó que por medio de su aplicación, el cálculo de raíces se hace más corto.

El teorema de Newton no quedó ahí, pues hubieron quienes se encargaron de realizar las demostraciones sobre el teorema del binomio como es el caso de: McLaurin, *para valores racionales de n* ; Salvemini y Kästner, *para valores enteros de n* ; Euler, *para valores fraccionarios de n* ; y Neils, *para exponentes complejos*.

3.2. El Binomio de Newton en los Libros de Texto

De acuerdo a lo mencionado en capítulos anteriores, sobre el binomio de Newton, debemos tener también en cuenta que no es sólo la forma en que se deberían enseñar ciertos temas sino además tomar en consideración la forma en como nos los presentan nuestros recursos didácticos, es decir los libros de textos. Tomando en cuenta que los libros de textos son parte fundamental en el desarrollo de nuestros estudiantes ya que no sólo les sirve como una guía de aprendizaje sino también como apoyo donde pueden practicar los temas vistos durante las clases. Por esa razón abordaremos la forma en que es presentado el tema del binomio de Newton en dos diferentes libros de textos usados en el nivel medio superior y en el libro de *Álgebra de Baldor*.

3.2.1. Matemáticas I

El libro de *Matemáticas I* (figura 3.2.1) 3ra. edición de Ortiz Campos (2014) y que contiene un cuaderno de actividades, es el que utilizaron las primeras cuatro generaciones de primer semestre de bachillerato, de Multiversidad Latinoamericana Campus Tuxtla, en el cual debemos encontrar el tema del *Binomio de Newton*, ya que es en primer semestre donde se abordan distintos temas de álgebra.

Realizando la revisión del libro, encontramos que en el bloque 5 *Operaciones Algebraicas*, se incluyen los siguientes subtemas:

- Lenguaje Algebraico
- Leyes de los exponentes y radicales
- Operaciones con polinomios
- Productos notables
- Factorización
- Fracciones algebraicas

Figura 3.2.1: Frente del libro de *Matemáticas I*

Dentro de los subtemas del bloque 5, es en el subtema de *productos notables* donde se debe encontrar información relacionada con el teorema del binomio de Newton y el triángulo de Pascal. Sin embargo dichos temas no son mencionados en el libro de texto, lo único que se encuentra es una actividad en la página 151 que dice "*Desarrolla por el teorema del binomio*" y vienen 10 ejercicios a resolver. Aquí es donde debemos prestar atención en que no se hace mención alguna al teorema del binomio, sin embargo colocan ejercicios para que el alumno los resuelva, de igual manera en el cuaderno de actividades viene una serie de ejercicios para resolver mediante el teorema del binomio.

Continuando con la revisión del libro para ver si se menciona en alguna otra parte el *teorema del binomio* encontramos en la página 165, en la sección de "*Coevaluación*", en uno de los criterios viene "*Comprende los conceptos de Triángulo de Pascal y Binomio de Newton*"; en la siguiente página (166) encontramos una rúbrica donde se verifican los aprendizajes del bloque, y dentro de los criterios a evaluar tenemos uno que dice "*Productos de binomios aplicando patrones de productos notables*" y en la descripción de los niveles encontramos lo siguiente:

- Excelente: Aplica patrones de productos notables para obtener el cuadrado de un binomio, el producto de binomios conjugados, el producto de dos binomios que tienen un término común y el cubo de un binomio. Aplica el triángulo de Pascal y el binomio de Newton.

- Bueno: Aplica patrones de productos notables para obtener el cuadrado de un binomio, el producto de binomios conjugados, el producto de dos binomios que tienen un término común. Aplica, en la mayoría de los casos, el triángulo de Pascal y el binomio de Newton.
- Satisfactorio: Aplica patrones de productos notables para obtener el cuadrado de un binomio, el producto de binomios conjugados. Aplica, en algunos casos, el triángulo de Pascal y el binomio de Newton.
- Deficiente: No aplica patrones de productos notables para obtener el cuadrado de un binomio, el producto de binomios conjugados, el producto de dos binomios que tienen un término común o el cubo de un binomio. No aplica el triángulo de Pascal y el binomio de Newton.

Finalmente, la última página donde se hace mención sobre el Triángulo de Pascal y el Binomio de Newton es en glosario, página 249. En ella podemos encontrar una breve descripción de cada uno, de la siguiente manera:

- *Teorema del Binomio*: Expresa la ley de formación de los términos del desarrollo del binomio de Newton.
- *Triángulo de Pascal*: Consiste en la disposición ordenada de los coeficientes del desarrollo del binomio de Newton.

3.2.2. Matemáticas I: Aritmética y Álgebra

Como docentes, debemos tener en cuenta que dentro de nuestros recursos didácticos no nos debemos quedar sólo con una bibliografía, debemos expandirlo para que la enseñanza al alumno sea mejor y que sea entendido lo mayor posible. El libro de *Matemáticas I: Aritmética y Álgebra* 2da. edición de Carrasco and Torres (2006) (figura 3.2.2), el cuál está hecho para estudiantes de primer semestre de nivel bachillerato.

Igual que el libro anterior nos centraremos en la parte del libro donde podamos encontrar temas relacionados al triángulo de Pascal y el Binomio de Newton, por esa razón nos centraremos en la unidad II *Polinomios de una variable*, que contiene los siguientes subtemas:

- ¿Para qué sirven los polinomio de una variable?
- ¿Cuánto sabes?
- Desarrollo temático
- Tema 1. Propiedades de la igualdad
- Tema 2. Problemas geométricos y algebraicos

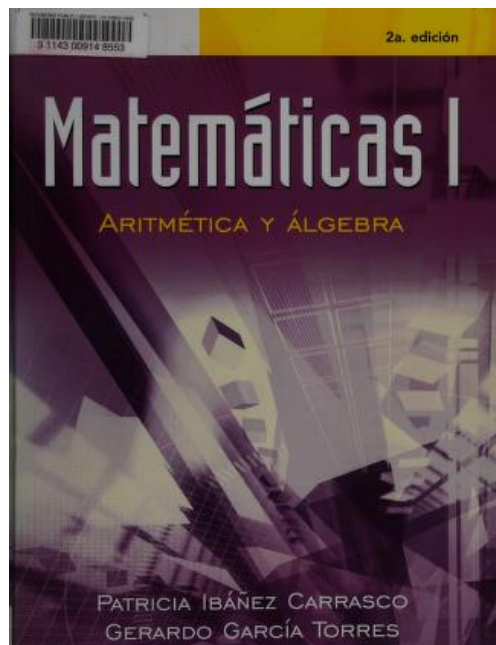


Figura 3.2.2: Frente del libro de *Matemáticas I: Aritmética y Álgebra*

- Integración del aprendizaje
- ¿Cuánto aprendiste?
- Evaluación formativa
- Realimentación

En la página 150, encontramos el tema de *productos notables*, y es aquí donde debemos encontrar algún tema relacionado con el triángulo de Pascal y el binomio de Newton. Nos movemos a la página 162, y aquí encontramos un subtema titulado *Triángulo de Pascal y binomio de Newton*.

En el libro se inicia haciendo una pregunta a los estudiantes de como resolverían $(4r + 2s)^8$ y menciona que hay una forma más fácil para desarrollarlo y que cualquier persona sin duda escogería la segunda opción. Es ahí donde introduce el triángulo de Pascal, y la relación que tiene con los coeficientes. Además, no presenta como tal al triángulo, sino se basa en los ejemplos que anteriormente usaron, es decir, las potencias de 0 a 3 y así poder obtener los coeficientes para una potencia 4. De esta manera, retoman el ejemplo del principio donde tenían una potencia de 8. En esta parte menciona que el triángulo solo sirve para los coeficientes, sin embargo, hacen falta los exponentes y es aquí donde se menciona al binomio de Newton y la forma que tiene.

Posteriormente se presentan unos ejemplos con potencias superiores a 3 y con signos positivos y negativos, de manera que el estudiante pueda observar el cambio

que tienen al tener diferentes potencias y signos. Ya como parte de reforzamiento para los estudiantes, vienen ejercicios que el alumno debe resolver utilizando el triángulo de Pascal y el binomio de Newton.

Al finalizar la unidad, viene una actividad que se llama *¿Cuánto aprendiste?* y en ella se incluyen todos los temas que se abarcaron en la unidad II, entre ellos la solución de binomios a distintas potencias. Y aunque tal vez este libro no tenga un cuaderno de actividades, la forma en como presenta sus temas y en especial el tema que nos interesa lo hacen una buena opción para un estudiante de primer semestre de bachillerato.

3.2.3. Álgebra de Baldor

El libro de álgebra de Baldor (figura 3.2.3) escrito por Baldor (1983) es de los libros de matemáticas más conocidos, y que es utilizado en distintos niveles académicos, desde nivel secundaria hasta nivel licenciatura.

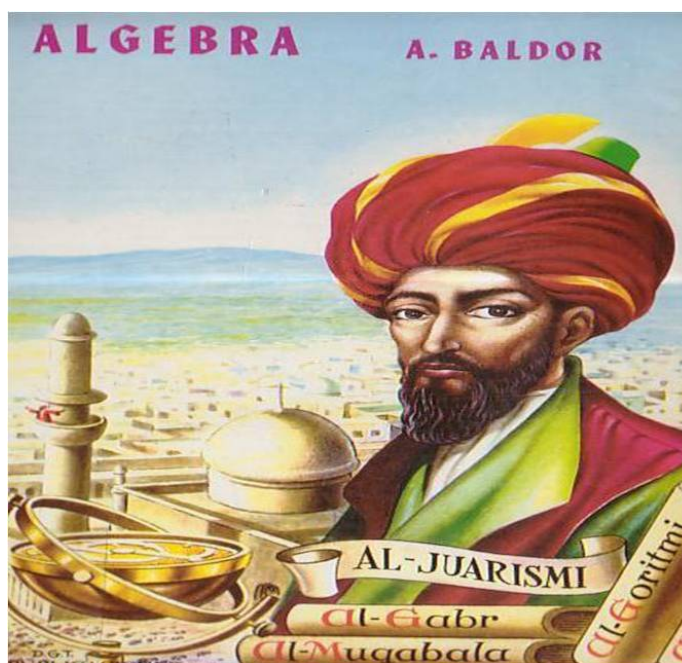


Figura 3.2.3: Frente del libro de *Álgebra de Baldor*

Es lógico pensar que el tema sobre el triángulo de Pascal y el binomio de Newton se abordarán en este libro, y lo podemos comprobar. Para esto nos vamos al capítulo *XXVIII Potenciación* y en la página 382 encontramos el tema del Binomio de Newton, y nos presentan unos ejemplos de $(a + b)$ elevados a las potencias 2, 3 y 4. A partir de eso nos menciona que estos ejemplos cumplen con unas leyes, las cuales son:

- Cada desarrollo tiene un término más que el exponente del binomio.

- El exponente de a en el primer término del desarrollo es igual al exponente del binomio, y en cada término posterior al primero, disminuye 1.
- El exponente de b en el segundo término del desarrollo es 1, y en cada término posterior a éste, aumenta 1.
- El coeficiente del primer término del desarrollo es 1 y el coeficiente del segundo término es igual al exponente de a en el primer término del desarrollo.
- El coeficiente de cualquier término se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por el exponente de a en dicho término anterior y dividiendo este producto por el exponente de b en ese mismo término aumentado en 1.
- El último término del desarrollo es b elevado al exponente del binomio.

También nos menciona que las leyes anteriores corresponden a la ley del binomio, y que dichas leyes se cumplen para cualquier potencia entera positiva. Adicional a lo mencionado nos presenta la fórmula, que fue descubierta por Newton, en que se representa esta ley y que nos permite elevar cualquier binomio a cualquier potencia sin tener que calcular las potencias anteriores. Después de eso se mencionan los distintos casos para el cálculo de binomios a distintas potencias enteras positivas y viene una serie de ejercicios para que se practique lo aprendido, utilizando la fórmula de Newton.

Pasando a la página 386, nos presentan el triángulo de Pascal, donde nos muestran la forma que tiene, la manera en que se compone y el lugar que ocupan los coeficientes en el desarrollo de un binomio. De esta manera nos explican como debemos utilizar el triángulo de pascal de acuerdo a la potencia que estemos utilizando. Un dato importante, es que hace mención que a este triángulo también es conocido por algunos matemáticos como *Triángulo de Tartaglia*, esto es importante ya que nos damos cuenta de toman en cuenta los hechos historicos de los avances matemáticos.

Finalizando el tema del triángulo de Pascal, vienen una serie de ejemplos con el uso del triángulo y ejercicios para resolver y practicar. Se menciona que para la solución de binomios, no solamente se aplica el triángulo de Pascal, sino que trabajan en conjunto las leyes del binomio de Newton y el triángulo de Pascal. Si bien sabemos, *Álgebra de Baldor* no es un libro diseñado para nivel medio superior, sin embargo se podría utilizar para que los alumnos tengan un panorama más amplio de conocimientos y con apoyo del docente, esto último ya que puede tener conceptos que sean complicados para el alumno entender por si solos.

Capítulo 4

Propuesta Didáctica

4.1. Prototipo Didáctico

Como vimos en capítulos anteriores, no todos los alumnos aprenden de la misma forma y un claro ejemplo de esto nos menciona Pozo (2008a) con los tipos de aprendizaje (figura 2.1.1) que él considera, y de los cuales nos centramos tanto en los aprendizajes verbales como procedimentales. Para esta sección nos enfocaremos en los aprendizajes procedimentales, específicamente en las *estrategias de aprendizaje*, donde para llevar a cabo cierta actividad requiere incluir tanto conocimiento conceptual como procedimental.

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + b^2 + ab + ab \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Figura 4.1.1: Representación algebraica y geométrica de $(a + b)^2$

Para esta sección se propone realizar un prototipo de la representación geométrica del binomio al cuadrado (figura 4.1.1) y al cubo (figura 4.1.2), con el propósito de que los alumnos tengan otra visión de como representar los binomios geométrica-

mente, es decir en dos y tres dimensiones.

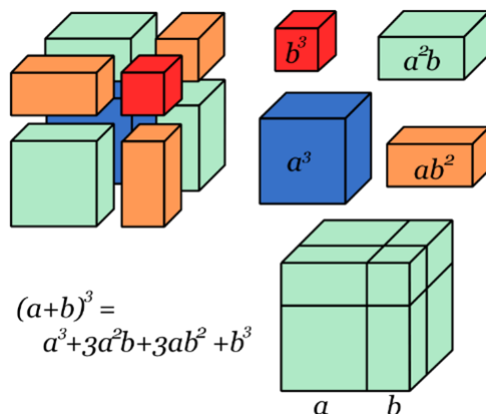


Figura 4.1.2: Representación algebraica y geométrica de $(a + b)^3$

Normalmente los libros como el caso de Baldor (1983) y Carrasco and Torres (2006) cuando hablan sobre el binomio al cuadrado $(a + b)^2$ utilizan un ejemplo geométrico (figura 4.1.1). En este caso utilizan un ejemplo en dos dimensiones que hace referencia también a la potencia del binomio, pero para el caso de un binomio al cubo, la forma de representación, que sería en tres dimensiones se vuelve complicado de expresar y ni hablar de dimensiones mayores a tres, ya que no tenemos conocimientos de las representaciones de esas dimensiones. Es por ese motivo que de forma geométrica solo podemos representar los binomios al cuadrado y al cubo.

Esta actividad hará que el estudiante aplique conocimientos adquiridos en grados anteriores, como son el construir cuerpos geométricos. Además que dentro de nuestros objetivos, tenemos que el estudiante le dé sentido en una forma geométrica a lo que está realizando y no se quede con el conocimiento algebraico.

Esta actividad la podemos implementar cuando empecemos a ver el tema de productos notables y los alumnos tengan que resolver binomios, y como complemento a la explicación algebraica incluimos la explicación geométrica. Donde la explicación del binomio al cuadrado se puede hacer en el pizarrón y para el binomio al cubo se le puede pedir al alumno llevar el material correspondiente y hacer la actividad en clase o en su casa, de forma que ellos logren armar la figura geométrica por ellos solos.

Recordando el aprendizaje basado en problemas (cuadro 2.3.1) donde los alumnos localizan sus recursos y el profesor es el encargado de guiarlos, también el que los estudiantes participan activamente en la identificación y solución del problema. Debemos tener en cuenta principalmente lo siguiente:

- Número de alumnos
- Tiempo disponible

- Objetivos a lograr del curso
- Bibliografía disponible
- Recursos del docente
- Que los problemas deben conectar con conocimientos anteriores y nuevos
- Forma de evaluar (Individual, en equipo, del compañero y autoevaluación)

De esta forma lograremos que los resultados de la actividad sean satisfactorios. A continuación presento un ejemplo del resultado de realizar la representación geométrica del binomio al cubo de una alumna de primer semestre de bachillerato.



Figura 4.1.3: Representación geométrica de $(a + b)^3$ vista por separado



Figura 4.1.4: Representación geométrica de $(a + b)^3$ vista frontal

Hay que tener en cuenta que la creatividad de los alumnos es diferente en todos, lo importante es que sean dedicados y responsables de realizar lo que se les solicite.



Figura 4.1.5: Representación geométrica de $(a + b)^3$ vista posterior

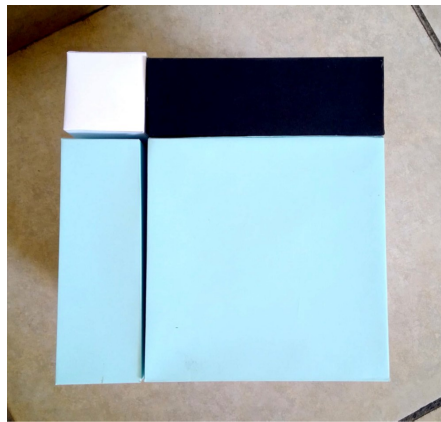


Figura 4.1.6: Representación geométrica de $(a + b)^3$ vista superior

4.2. Problemas de Aplicación

Como hemos visto a lo largo de los capítulos anteriores, el binomio de Newton resulta ser un gran aporte en los avances matemáticos. Pero no hemos visto las aplicaciones que este tiene en la vida diaria, es así que en esta sección abordaremos algunas de las aplicaciones que tiene el binomio de Newton.

4.2.1. Cálculo de raíces por medio del binomio

El artículo *Teorema del Binomio* de Becerra (2019), nos habla solo el binomio de Newton y la fórmula que lo representa para poder utilizarlo, también nos menciona una de las aplicaciones de éste, el cálculo de raíces. En la actualidad es muy común

que los alumnos obtengan las raíces de ciertos números utilizando la calculadora, pero tener el conocimiento de cómo obtenerlas debe ser algo esencial en ellos. Becerra (2019) nos presenta algunos ejemplos de como obtener la raíz de un número utilizando el teorema del binomio. El siguiente ejemplo es uno de los que podemos encontrar en el artículo *Teorema del Binomio*:

1.- Obtener la $\sqrt{30}$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{30} &= \sqrt{25 + 5} \\
 &= \sqrt{25\left(1 + \frac{5}{25}\right)} \\
 &= 5\sqrt{1 + \frac{5}{25}} \\
 &= 5\left(1 + \frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= 5\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1-2}{2^2(2!)}\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{(1-2)(1-2(2))}{2^3(3!)}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \right. \\
 &\quad \left. \frac{(1-2)(1-2(2))(1-3(2))}{2^4(4!)}\left(\frac{1}{5}\right)^4 + \dots\right) \quad (4.1) \\
 &\approx 5(1 + 0.1 - 0.005 + 0.0005 - 0.0000625 + \dots) \\
 &\approx 5(1.0954375) \\
 &\approx 5.4771875
 \end{aligned}$$

Al observar el ejemplo de Becerra (2019) podemos observar que mientras más avanzamos los términos contendrán cada vez más decimales. Por lo que se puede optar por solo utilizar los primeros cuatro términos y tener un resultado aproximado de la raíz que se busca.

4.2.2. Interés compuesto

Becerra (2019) nos presenta otras de las aplicaciones del binomio de Newton, la cual es la aplicación de la fórmula en el interés compuesto. Y para eso nos lo presenta de la siguiente manera:

- Tomamos C como un capital invertido durante n años a una tasa i de interés compuesto por cada año. Que durante el primer año el capital produce un interés $C \cdot i$, por lo tanto, el monto final M_1 será de:

$$M_1 = C + C \cdot i = C(1 + i).$$

Pasando el segundo año, el monto de $C \cdot i$ tendrá un interés igual a:

$$C(1 + i)i = C(i + i^2).$$

Por lo que el monto final para M_2 será de:

$$\begin{aligned}
 M_2 &= M_1 + C(i + i^2). \\
 &= C(1 + i) + C(i + i^2) = C(i^2 + 2i + 1) = C(1 + i)^2.
 \end{aligned}$$

Continuando de forma análoga, podemos concluir que después de n años, el

capital inicial C , que fue invertido como interés compuesto se convertirá en el monto final M_n que será: $M_n = C(1 + i)^n$.

A partir de lo anterior, podemos encontrar un caso particular del teorema del binomio. Y observamos que aún cuando la fórmula del interés compuesto se dedujo para una tasa de interés anual para n años, también aplica si los periodos de conversión son semestres, trimestres, días, etc., pero éstos tendrían que convertir a años. A continuación veamos un ejemplo de lo antes mencionado.

1.- Determina el monto que se obtendrá de un capital de \$50,000 después de 5 años a una tasa de interés compuesto anual del 6 %.

$$\begin{aligned} M_n &= C(1 + i)^n \\ M_5 &= 50000(1 + 0.06)^5 \\ &\approx 50000(1.338225578) \\ &\approx \$66,911.27 \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.2.3. El número e

Otra de las aplicaciones que tiene el binomio de Newton, como menciona Cohecha Torres (2014), es la obtención del número e utilizando el binomio de Newton.

La constante de Euler también es conocida como constante de Napier y lleva su nombre por el matemático John Napier, quien lo reconoció y utilizó por primera vez, además fue quien introdujo el concepto del logaritmo en el cálculo matemático. Como sabemos, la constante de Euler e es un número irracional que es muy utilizado en el campo de las matemáticas y cuyo valor tiene una aproximación de: 2.718281828.

e tiene gran importancia en el cálculo, por el hecho de que para la derivada de la función e^x el resultado sea el mismo y esto hace que la función exponencial se encuentre a menudo como resultado de ecuaciones diferenciales sencillas. Esto resulta en que se pueden describir algunos eventos físicos que son regidos por leyes sencillas, como por ejemplo la velocidad con que se vacía un depósito de agua, el giro de una veleta frente a una ráfaga de viento, el movimiento que tiene un sistema de amortiguación de un automóvil o el cimbreo de un edificio metálico en caso de algún terremoto o sismo.

El uso de la constante de Euler también está presente en otras áreas de la ciencia, por ejemplo para describir fenómenos eléctricos y electrónicos, como son las descargas de condensadores, la amplificación de corriente en transistores BJT, etc. Para el área de biología y química, tenemos por ejemplo para observar el crecimiento de las células y la concentración de iones, respectivamente. Entre otras aplicaciones más.

Sabemos que el número e es un número real y lo podemos calcular por medio del siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (4.3)$$

De la ecuación 4.3 tenemos que n es un número natural. Si desarrollamos la potencia y aplicamos el teorema del binomio, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1(1 - \frac{1}{n})}{2!} + \frac{1(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})}{3!} + \dots \\ &\quad + \frac{1(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{n-1}{n})}{n!} \end{aligned} \quad (4.4)$$

De acuerdo a lo anterior, si n tiende a infinito, los productos que se encuentran en el numerador tienden a 1, por lo tanto se obtiene que:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} \dots \quad (4.5)$$

De manera que de acuerdo a la ecuación 4.4 obtenemos la siguiente ecuación para el cálculo de la exponencial:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \quad (4.6)$$

A continuación, se presenta una serie de ejemplos para el cálculo del valor de la exponencial los cuales podemos resolver utilizando el teorema del binomio.

1.- Determina el valor de $a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1$

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \\ &= (1 + 1)^1 \\ &= (2)^1 \\ &= 2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

2.- Determina el valor de $a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$

$$\begin{aligned} a_2 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left[1^2 + 2(1) \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \\ &= \left[1 + \left(\frac{2}{2}\right) + \frac{1}{4}\right] \\ &= (1 + 1 + .25) \\ &= 2.25 \end{aligned} \quad (4.8)$$

3.- Determina el valor de $a_{64} = \left(1 + \frac{1}{64}\right)^{64}$

$$\begin{aligned} a_{64} &= \left(1 + \frac{1}{64}\right)^{64} \\ &= 2.6973449526 \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.3. Secuencia Didáctica del Binomio de Newton

Retomando un poco a Vygotski y Piaget, grandes representantes del constructivismo, quienes nos hablan sobre cómo el estudiante proyecta de forma activa las experiencias que obtiene pero de acuerdo a la dimensión social y cultural presentarán diferencias. Por un lado tenemos a Piaget que se centra en la interacción que se tiene con el medio y a Vygotski quien habla sobre cómo el medio social influye en la construcción interna. Pero ambos coinciden en que el medio social tiene un papel importante en la construcción de conocimientos.

De acuerdo a lo anterior, usaremos el modelo constructivista para llevar a cabo nuestra secuencia didáctica, esto nos lleva al constructivismo educativo, donde el proceso de enseñanza es una sucesión dinámica, participativa y que tiene interacción con el sujeto. De manera que el nuevo conocimiento sea construido por el alumno, quien parte de conocimientos previos y así generar nuevo conocimiento. Como vimos en capítulos anteriores, dentro de las características del constructivismo encontramos que el individuo tiene las capacidades para formar nuevos conocimientos por medio de la reflexión de sus acciones.

Justificando otro punto acerca de utilizar un modelo constructivista y de acuerdo con Cohecha Torres (2014), tiene ciertos beneficios sobre otros modelos, mencionando algunos de ellos son:

- La educación trabaja mejor cuando se concentra en el pensamiento crítico y entendimiento, en lugar de solo memorizar. Teniendo en cuenta que el constructivismo se centraliza en el cómo pensar y entender.
- En un aprendizaje por medio de un modelo constructivista, los alumnos crean patrones capaces de transferir a otros escenarios educativos.
- Los estudiantes se enseñan a cuestionar cosas y ser curiosos ante las incógnitas de la vida.
- Los alumnos se vuelven más comunicativos y colaborativos con la sociedad.

Para realizar la secuencia didáctica, debemos tener en cuenta en qué bloque o sección de aprendizaje se encuentra incluido el tema del Binomio de Newton. Este, de acuerdo con el programa de estudios de primer semestre para Matemáticas de la dirección general del bachillerato (DGB), se encuentra ubicado en el bloque V: Operaciones algebraicas. Cuyo propósito del bloque es que el alumno aplique

el álgebra en su vida, valorando su importancia para dar soluciones a problemas relacionados con fenómenos cotidianos. De lo anterior para la secuencia didáctica obtenemos lo siguiente :

- Asignatura, unidad temática dentro del curso en general y tema general.

Asignatura: Matemáticas I

Unidad: Bloque V

Tema general: Operaciones algebraicas

En cada semestre tenemos el tiempo limitado para poder abarcar todos los temas y contenidos de la materia, por esa razón tomar en cuenta no sólo la cantidad de temas que se tiene que enseñar durante el semestre sino también el tiempo para actividades debe ser algo que se debe tener muy presente. Pero antes de asignar las horas para cada tema, debemos saber cuales son los contenidos de cada tema, para el caso del bloque V, se obtiene lo siguiente:

- Contenidos del tema: Operaciones algebraicas

Lenguaje algebraico

Leyes de los exponentes y radicales

Operaciones con polinomios

Productos notables

Factorización

Fracciones algebraicas

Una vez que se tengan considerado los contenidos del tema que se abordará, nos queda organizar el tiempo y número de sesiones que serán asignado a cada contenido. Para el bloque V. *Operaciones algebraicas*, de acuerdo con el plan de estudios de la DGB, tiene asignado un tiempo de 20 horas. Si la materia de Matemáticas I se lleva 5 horas por semana nos queda que el bloque V se abordará durante 4 semanas. Para el bloque V, se tienen considerados los siguientes temas:

- Duración de la secuencia y número de sesiones previstas

Duración de la secuencia: 20 horas

Sesiones previstas: 4 sesiones

- Nombre del profesor que elaboró la secuencia

Nombre del profesor:

Continuando y tomando como referencia a lo mencionado en capítulos anteriores, hay que tomar en cuenta los diferentes tipos de competencias que se presentan, para el caso de *Matemáticas I* tenemos:

- Transversales:

Abarca temas relacionados con la educación financiera, moral y cívica, para la paz (derechos humanos), equidad de género, interculturalidad, lenguaje no sexista y vialidad.

Son temáticas de cómo se respeta a la naturaleza, uso de recursos naturales, desarrollo sustentable y reciclaje.

Hace referencia a temas de educación sexual integral y reproductiva, cuidado de la salud, prevención y consumo de sustancias tóxicas.

Está integrado por temas tales como fomento a la lectura, comprensión lectora, lecto-escritura y lectura de textos comunitarios o en lenguas nativas.

- **Disciplinares:**

Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

- **Profesionales:**

Construye e interpreta situaciones reales, hipotéticas o formales que requieren de la utilización del pensamiento matemático. Formula y resuelve problemas, aplicando diferentes enfoques.

Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos o analíticos.

Pensamiento crítico y solución de problemas: Utiliza el pensamiento lógico y matemático, así como los métodos de las ciencias para analizar y cuestionar críticamente fenómenos diversos.

Desarrolla argumentos, evalúa objetivos, resuelve problemas, elabora y justifica conclusiones y desarrolla innovaciones. Asimismo, se adapta a entornos cambiantes.

- **Genéricas:**

Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

Pasando al siguiente elemento de nuestra secuencia, aquí el docente debe considerar si dejará algún proyecto o resolver algún ejercicio (esto es a consideración del docente). Para el siguiente punto, se propone dejar al alumno que realice la representación geométrica del binomio al cubo (fig. 4.1.2), en donde aplicará conocimientos adquiridos anteriormente y actuales.

- **Elección de actividades o proyectos**

Proyecto: Representación geométrica del binomio al cubo

- **Finalidad, propósitos u objetivos**

Objetivo: Que el estudiante le dé un sentido geométrico y no solo algebraico

a lo que está realizando, de esta forma expandir el conocimiento que están adquiriendo visto de dos formas diferentes.

Ya que el proyecto está definido, se deben estructurar los criterios de evaluación para proyectos, portafolio de evidencia y exámenes.

- Orientaciones generales para la evaluación
Los criterios de evaluación ya depende de cada docente y también de los indicados por la institución educativa.

En nuestro caso tenemos criterios establecidos por la institución educativa, los cuales son:

- Actividades y trabajos: 50 %
- Foros (Asistencia): 10 %
- Disciplina: 10 %
- Examen parcial: 30 %

Como vimos en el capítulo 2, Díaz-Barriga (2013) nos menciona que dentro de los elementos que debe incluir una secuencia didáctica, dentro de las *líneas de secuencia didáctica*, se incorpora la apertura, desarrollo y cierre. Y para poder llevar a cabo esta sección es importante que no sólo tomemos en consideración los temas a ver, sino además el tiempo disponible y la capacidad de nuestros alumnos para entender los distintos temas.

Sabemos que el tiempo que tenemos para abarcar todos los temas son muy cortos y quizá no se pueda realizar todo lo que se gustaría, pero podemos abarcar un poco de todo. Como menciona Haverhals (2010) el uso de la historia dentro del aula tiene grandes beneficios, así que la podemos incorporar como una actividad de introducción o apertura para la clase. Y se puede agregar de distintas formas.

- Apertura: 30 minutos
 - Examen diagnóstico
 - Lineas del tiempo
 - Investigaciones previas sobre el tema
 - Exposiciones anecdóticas con imágenes
 - Exposiciones por equipo con temas asignados
 - Busquedas en internet sobre el tema
 - Preguntas sobre el tema a ver, una clase anterior
 - Entrevista a alumnos de grados superiores

Conforme a las actividades que se pueden realizar dentro de las actividades de apertura, mencionamos el *examen de diagnóstico*, el cual puede ser utilizado como una actividad de apertura ya que nos ayuda a conocer los conocimientos y

habilidades que han adquirido los alumnos ya sea en grados anteriores o en clases pasadas. Y puede ser de opciones múltiples o de preguntas abiertas.

Para la parte del desarrollo, hay que tomar ciertas características del ABP, donde el alumno es responsable en su proceso de aprender y que puede aprender por su propia cuenta. Es en el desarrollo donde se le explica a los estudiantes el tema y podrán adquirir los conocimientos que necesitan para poder resolver problemas futuros. Aquí mismo el alumno debe resolver todas sus dudas para que logre realizar las actividades en el cierre.

- Desarrollo: 150 minutos
 - Explicación del tema con diferentes ejemplos
 - Ejercicios prácticos del tema
 - Ejercicios que presenten diferentes casos
 - Problemas de aplicación en la vida diaria
 - Actividades para casa
 - Ejercicios que conecten el tema anterior con éste

Para finalizar la etapa de las líneas de secuencia didáctica, tenemos el cierre. Es aquí donde nos daremos cuenta que el alumno aprovechó todas las actividades de apertura y desarrollo y se ve reflejado en los conocimientos que tiene al desarrollar o solucionar distintos problemas.

- Cierre: 60 minutos
 - Taller de ejercicios
 - Ejercicios de aplicación
 - Realizar dinámicas grupales
 - Evaluación parcial
 - Portafolio de evidencias

Para este punto los alumnos deben dominar gran parte del tema y haber aclarado sus dudas, ya que de lo contrario esto puede ser un motivo por el cual se le complicarán futuros temas. Terminando las líneas de secuencia didáctica pasamos a las líneas de evidencia, que son aquellas que incorporan distintas evidencias o actividades que se realizaron a lo largo de las sesiones de clases. Las actividades a realizar en esta etapa son opcionales al docente, no olvidando los objetivos y competencias del curso.

- Línea de evidencias de evaluación del aprendizaje
 - Evaluación sumativa
 - Evidencias de aprendizaje
 - Examen (que incluya problemas de situaciones reales)
 - Proyecto final

Y por último dentro de nuestra secuencia didáctica, tenemos a los recursos didácticos. Que son aquellos de donde nos apoyaremos para enseñar el curso al

alumno, recordando que no sólo debemos basarnos en lo que nos dice el libro de texto que se asigna al curso. Y en el caso de agregar otra bibliografía, que ésta sea de fácil acceso al alumno.

- Recursos
 - Libro de texto
 - Álgebra de Baldor
 - Internet
 - Enciclopedias
 - Cuaderno de actividades

Más adelante, en el Apéndice A, encontraremos un ejemplo de secuencia didáctica para la enseñanza del binomio de Newton, la cual puede ser utilizada para enseñar durante el primer semestre de bachillerato.

Capítulo 5

Conclusiones

Para empezar con la propuesta didáctica para la enseñanza del binomio de Newton. Se hizo la revisión bibliográfica de:

- Como se presenta el tema del binomio de Newton y el triángulo de Pascal en los libros de texto para nivel bachillerato.
- Le historia del binomio de Newton a lo largo de los años.

Se tomó como referencia, para comprender la didáctica de las matemáticas, los tipos de aprendizajes de Pozo donde se habló principalmente de los aprendizajes verbales y procedimentales, y las aportaciones que estos nos dan en la enseñanza. Y dentro de las teorías de aprendizaje se abordaron las de Ausbel, Piaget y Vygotski, quienes son los más representativos del constructivismo.

Se elaboró un ejemplo de secuencia didáctica para la enseñanza, donde vienen todos los elementos que debe contener la secuencia y además se incluye un trabajo que puede ser tomado como actividad de clase o proyecto de tema, el cual es la construcción de un cuerpo geométrico que representa un binomio elevado a la potencia tres, el cual los alumnos tendrán que armar y formar para que tenga la forma, utilizando distintas herramientas, conocimientos anteriores y su creatividad.

Se propuso un ejemplo de secuencia didáctica para la enseñanza del binomio de Newton, ver anexo. La cual se puede llevar a cabo durante el primer semestre de bachillerato.

De todo esto, me doy cuenta que conforme vamos teniendo más grupos a lo largo de los años vamos ganando experiencia para dominar cada vez más nuestra labor como docente. Sin embargo, no debemos quedarnos con lo que ya sabemos o con la experiencia que tenemos, debemos mejorar y seguir aprendiendo cada día algo nuevo y no sólo por nosotros sino también por nuestros alumnos. Hay que recordar que cada alumno es un mundo nuevo y todos son completamente diferentes, por esa razón nosotros también debemos seguir mejorando y aprendiendo nuevas cosas. El realizar este proyecto, me da una nueva perspectiva para mejorar la enseñanza de

ciertos temas, cambiando la forma tradicional de enseñar y logrando que nuestros alumnos tengan mayor interés en aprender cosas nuevas. La educación al igual que nosotros va cambiando con el tiempo, y debemos aprovechar las nuevas tecnologías y estrategias que se presentan para que la enseñanza tenga un mayor impacto en nuestros alumnos.

Apéndice A

Secuencia Didáctica

En este apartado se pondrá un ejemplo de secuencia didáctica para la enseñanza del binomio de Newton.

Identificación			
Asignatura:	<i>Matemáticas I</i>	Semestre:	<i>Primero</i>
Unidad:	<i>Bloque V</i>	Ciclo Escolar:	<i>2021-2022</i>
Fecha de aplicación:		Horas asignadas:	<i>20 Horas</i>
Docente:		Sesiones por semana:	<i>5 Sesiones</i>

Cuadro A.0.1: Primera parte de la secuencia

Intenciones formativas	
Propósito de la asignatura:	<i>Promover el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en el alumnado, mediante el uso de aritmética, álgebra, probabilidad y estadística, permitiéndole proponer alternativas de solución a problemas tomados de su vida cotidiana desde diversos enfoques tales como el determinista o el aleatorio</i>
Tema:	<i>Operaciones algebraicas</i>
Propósito del bloque:	<i>Que el alumno aplique el álgebra en su vida, valorando su importancia para dar soluciones a problemas relacionados con fenómenos cotidianos.</i>

Cuadro A.0.2: Segunda parte de la secuencia

Competencias del nivel			
Transversales	Disciplinares	Profesionales	Genéricas
Abarca temas relacionados con la educación financiera, moral y cívica, para la paz (derechos humanos), equidad de género, interculturalidad, lenguaje no sexista y vialidad.	Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	Construye e interpreta situaciones reales, hipotéticas o formales que requieren de la utilización del pensamiento matemático. Formúla y resuelve problemas, aplicando diferentes enfoques.	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

Cuadro A.0.3: Tercera parte de la secuencia didáctica

Aprendizajes Esperados	Conocimientos	Habilidades	Actitudes
Lenguaje algebraico. Leyes de los exponentes y radicales. Operaciones con polinomios. Productos notables. Factorización. Fracciones algebraicas.	Identifica los procedimientos para resolver problemas algebraicos. Explica la solución de problemas algebraicos.	Expresa libremente sus ideas, mostrando respeto por las demás opiniones. Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.	Utiliza el lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones. Propone procesos de solución identificando posibles errores. Aplica el álgebra en su vida cotidiana favoreciendo su pensamiento crítico.

Cuadro A.0.4: Cuarta parte de la secuencia didáctica

Actividades de aprendizaje		
Apertura	Desarrollo	Cierre
Los alumnos llevarán información e imágenes acerca de la historia del binomio de Newton para realizar una línea del tiempo, la cual realizarán por equipo. <i>Esta actividad tiene una duración de 30 min.</i>	En esta parte es donde se explicará el tema a los alumnos, haciendo énfasis en la conexión que tiene el triángulo de Pascal con el teorema del binomio de Newton, aquí el docente se puede apoyar de los ejercicios que contiene el libro de texto. Es aquí donde el docente explicará que el binomio al cuadrado lo pueden observar en su forma geométrica, y deja a los alumnos llevar material para realizar una actividad en la siguiente sesión. <i>Esta actividad tiene una duración de 150 min.</i>	El docente pondrá a los alumnos diferentes ejemplos donde se aplique el binomio de Newton y se realizará la actividad, que es el desarrollo geométrico del binomio al cubo, de manera que los alumnos demuestren lo aprendido en niveles anteriores y utilicen la lógica para armar la figura correctamente. <i>Esta actividad tiene una duración de 60 minutos.</i>

Cuadro A.0.5: Quinta parte de la secuencia

Recursos y materiales didácticos			
Materiales	Bibliográficos	Electrónicos	Informáticos
Marcadores, tijeras, plumones, pegamento, colores, cartulinas de colores, regla y escuadra.	Libros y cuadernillo de actividades.	Computadora	Sitios de búsqueda académica por internet.

Cuadro A.0.6: Sexta parte de la secuencia didáctica

Evaluación de aprendizaje		
Evidencia	Formativa	Sumativa
Se evaluará la participación individual de cada alumno, así como también la participación grupal en las actividades.	El docente observa la forma de participación de los alumnos para solucionar los ejercicios que se les asignen y a su vez registrará en la lista de cotejo semanal.	El docente aplicará una evaluación de todos los temas vistos a lo largo del parcial.

Cuadro A.0.7: Séptima parte de la secuencia

Criterios de evaluación	
Actividades y trabajos:	50 %
Asistencia:	10 %
Disciplina:	10 %
Examen parcial:	30 %

Cuadro A.0.8: Extra en la secuencia

Bibliografía

- Araya, V., Alfaro, M., and Andonegui, M. (2007). Constructivismo: orígenes y perspectivas. *Laurus*, 13(24):76–92.
- Ausubel, D. et al. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF*, 1(1-10):1–10.
- Ausubel, D., Novak, J., Hanesian, H., and Pineda, M. (1976). *Psicología Educativa: un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas.
- Baldor, D. A. (1983). *Algebra de Baldor*. Grupo Patria Cultural.
- Becerra, J. (2019). Teorema del binomio. *Facultad de Contaduría y Administración. UNAM*.
- Carrasco, P. and Torres, G. (2006). *Matemáticas I, Aritmética Y Álgebra*. Thomson.
- Cohecha Torres, C. H. (2014). Teorema del binomio y aplicaciones. *Facultad de Ciencias*.
- Díaz, A., Hernández, R., et al. (2015). Constructivismo y aprendizaje significativo.
- Díaz-Barriga, Á. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. *UNAM, México, consultada el*, 10(04):1–15.
- Esteve, M. R. M. and Vallhonesta, F. R. (1995). El triángulo aritmético de blaise pascal (1623-1662).
- Fowler, D. (1996). La función de coeficiente binomial. *El mensual matemático estadounidense*.
- Granja, D. O. (2015). El constructivismo como teoría y método de enseñanza. *Sophia*, (19):93–110.
- Haverhals, Nick y Roscoe, M. (2010). La historia de las matemáticas como herramienta pedagógica: Enseñanza de la integral de la secante a través de la proyección de mercator. *El entusiasta de las matemáticas*.
- Morales Bueno, P. and Landa Fitzgerald, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas.

- O'Connor, J. J. and Robertson, E. F. (1996). Indexes of biographies. *Universidad de Saint Andrews Scotland*.
- Ortiz Campos, F. J. (2014). *Matemáticas 1*. Grupo Editorial Patria.
- Pozo, J. (2008a). *Aprendices y maestros: la psicología cognitiva del aprendizaje*. Alianza Ensayo. Alianza Editorial.
- Pozo, J. I. (2008b). *Aprendices y Maestros la psicología cognitiva del aprendizaje*. 2ª Edición. Alianza Editorial.
- Rodríguez, A. F. and Sandoval, C. D. (2016). La historia como una herramienta didáctica para la enseñanza del concepto de integral.
- Smith, D. E. (1958). Historia de las matemáticas-volumen i og ii.
- Tobón, S. T., Prieto, J. H. P., and Fraile, J. A. G. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias*, volume 1. Pearson educación México.
- Valdivia, A. O. and Pérez, R. P. (2007). La secuencia didáctica como herramienta del proceso enseñanza aprendizaje en el área de químico biológicas. *ContactoS*, 63:19–25.