



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



Tecnológico Nacional de México

**Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia
en Educación Técnica**

**Propuesta didáctica del tema ecuación de la recta y ecuación del plano en la
modalidad B-Learning**

Tesina para obtener el grado de:
Especialista en Aprendizaje y Enseñanza de las Ciencias Básicas

Presenta:
Nicolasa Hernández Sosa

Director de tesina:
Dr. Gustavo Arroyo Delgado

Santiago de Querétaro, Qro., México, (noviembre, 2022)



Oficio de Autorización de Publicación



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación
Técnica
Departamento de Posgrado

Querétaro, Qro **07/12/2022**
OFICIO D.P. 516/2022

NICOLASA HERNÁNDEZ SOSA
PRESENTE

Asunto: Autorización de publicación de Tesina

Por este medio, comunico a usted que se autoriza la publicación de su trabajo de tesina denominado:

"Propuesta didáctica del tema ecuación de la recta y ecuación del plano en la modalidad B-Learning"

Que presenta para optar el grado de Especialista en Aprendizaje y Enseñanza de las Ciencias Básicas.

Esta autorización se emite conforme al dictamen que otorga el comité académico integrado por:

Gustavo Arroyo Delgado
Raquel Cárdenas Collazo
Isaac Hernández Renovato

Director de tesina
Integrante del Comité Tutorial
Integrante del Comité Tutorial

Este oficio de autorización de publicación tendrá vigencia hasta el 8 de febrero de 2023.

ATENTAMENTE

*Excelencia en Educación Tecnológica-
Calidad para la calidad en educación superior tecnológica*

ANA MARÍA ESTRADA AGUILAR
JEFA DEL DEPARTAMENTO DE POSGRADO

C.c.p. José Ricardo Aguilera Terrats – Coordinador de la EAECB.
Jazel Giovanna García Aguillón – Jefa del Departamento de Servicios Escolares – Presente.
Archivo.



SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
CENTRO INTERDISCIPLINARIO DE INVESTIGACIÓN
Y DOCENCIA EN EDUCACIÓN TÉCNICA
POSGRADO



Av. Universidad 282, No. 282 Pte., Col. Centro, C.P. 76000, Querétaro, Qro.,
Tels. (442) 2 16 37
46, 47 y 48, ext. 410 e-mail: posgrado@ciidet.edu.mx tecnm.mx | ciidet.edu.mx



2022 Flores
Magón
Año de la Revolución Mexicana



Agradecimientos

Agradezco al CIIDET por permitirme estudiar y ampliar un poco los conocimientos en Ciencias básicas.

A mis maestros por compartir sus conocimientos y experiencias, entre ellos a la maestra Raquel, maestro José Luis, maestro Isaac, Dr. Alberto, Dr. José Ricardo, y especialmente al Dr. Gustavo por guiarme en el camino.

Resumen

Se implementó la propuesta didáctica para incorporar los conocimientos previos en el curso de cálculo vectorial, específicamente en la unidad 1 denominada vectores en el espacio, reforzando el tema de ecuación de la recta y del plano, para ello se utilizó el modelo de diseño instruccional denominado ADDIE adaptado por el TECNM, en sus etapas de: Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación y evaluación, el cual se complementó con el estándar 366 de CONOCER, mismo que indica como desarrollar cursos en línea, además a nivel de diseño de actividades o tareas, se trabajó con el resultado de aprendizaje que sugiere Pozo (2013).

Se analizó a nivel general como estaban los estudiantes, docentes, infraestructura, programa de cálculo vectorial, teorías del aprendizaje, así como los conocimientos previos que requerían incorporarse para la unidad 1.

Se hizo un diseño a través de una guía didáctica y un documento general de la materia, para que el estudiante pueda ver que actividades va a realizar, tanto en línea como presencial y en qué consiste la materia.

En el desarrollo, se elaboraron diferentes materiales sobre conocimientos previos y de contenidos de la unidad 1 de Cálculo Vectorial, tanto de vectores en el plano bidimensional como tridimensional, así como de ecuación de la recta en el plano y en el espacio, y ecuación del plano, todo ello de acuerdo con lo que establecen las diferentes teorías y resultados del aprendizaje de Pozo (2013). Los ejercicios se modelaron a través de GeoGebra, para que el estudiante pueda apreciar a través de un mismo ejercicio las diferentes formas de ecuación de la recta, y teniendo esos conocimientos previos pueda aplicarlos en la ecuación de la recta vectorial y ecuación del plano, y con ello transitar hacia un conocimiento más complejo.

Se implementó el diseño instruccional en una plataforma educativa: Moodle y classroom, en donde tanto las actividades como recursos están disponibles para la modalidad B_learning.

La evaluación será formativa y sumativa, la primera al inicio y durante el curso; la segunda al final. Formativa al inicio será llevada cabo por el par académico y tendrá que ver con el diseño del curso, instrumentación didáctica y materiales del curso, mediante listas de cotejo que proporciona TECNM bajo el modelo ADDIE y el estándar 366 de CONOCER; la evaluación formativa durante el curso, se aplicará a los estudiantes mediante

cuestionarios en línea para evaluar las evidencias de los contenidos previos del mismo; y la sumativa final será también mediante varios instrumentos para evaluar los distintos resultados de aprendizaje.

Abstract

The didactic proposal was implemented to incorporate previous knowledge in the vector calculus course, specifically in unit 1 called vectors in space, reinforcing the theme of equation of the line and the plane, for this the instructional design model called ADDIE adapted by the TECNM was used, in its stages of: Analysis, Design, Development, Implementation and evaluation, which was complemented with the standard 366 of CONOCER, which indicates how to develop online courses, also at the level of design of activities or tasks, we worked with the learning outcome suggested by Pozo (2013).

It was analyzed at a general level how the students, teachers, infrastructure, vector calculation program, learning theories, as well as the previous knowledge that were required to be incorporated for unit 1.

A design was made through a didactic guide and a general document of the subject, so that the student can see what activities he is going to carry out, both online and in person, and what the subject consists of.

In the development, different materials were elaborated on previous knowledge and contents of unit 1 of Vector Calculation, both of vectors in the two-dimensional and three-dimensional plane, as well as of the equation of the line in the plane and in space, and equation of the plane, all this in accordance with what is established by the different theories and learning results of Pozo (2013). The exercises were modeled through GeoGebra, so that the student can appreciate through the same exercise the different forms of equation of the line, and having this previous knowledge can apply them in the vector equation and equation of the plane, and thereby moving towards a more complex knowledge.

Instructional design was implemented in an educational platform: Moodle and classroom, where both activities and resources are available for the B_learning modality.

The evaluation will be formative and summative, the first at the beginning and during the course; the second at the end. Training at the beginning will be carried out by the academic peer and will have to do with the design of the course, didactic instrumentation and course materials, through checklists provided by TECNM under the ADDIE model and the 366 CONOCER standard; the formative evaluation during the course, will be applied to the students through online questionnaires to evaluate the evidence of the previous contents of the same; and the final summation will also be through various instruments to evaluate the different learning results.

Índice general

Oficio de Autorización de Publicación.....	III
Agradecimientos	IV
Resumen	V
Abstract.....	VII
Índice general	VIII
Índice de figuras	X
Índice de tablas.....	XIV
Capítulo 1. Introducción.....	15
1.1 Descripción de la problemática.....	15
1.1.1 Personal académico del ITSAT.....	19
1.1.2 Cursos de formación docente:	19
1.1.3 Plataformas educativas:.....	20
1.1.4 Estudiantes:.....	22
1.2 Justificación.....	26
1.3 Objetivo General	29
1.3.1 Objetivos específicos:	29
1.4 Organización de la Tesina	30
Capítulo 2. Marco teórico didáctico.	31
2.1 Modalidades de educación en línea	31
2.1.1 E-learning.	31
2.1.2 B-learning.	34
2.1.3 M-learning.....	34
2.2 Diseño instruccional.	34
2.3 Modelo ADDIE.....	35
2.4 Estándar 366 de CONOCER	38
2.5 Teorías del aprendizaje	42
2.5.1 El sistema del aprendizaje.	42
2.5.2 Conductista (Skinner).....	45
2.5.3 Aprendizaje significativo.....	46
2.5.4 Aprendizaje por descubrimiento	48
2.5.5 Zona del desarrollo próximo.....	50
2.6 Aprendizaje basado en problemas (ABP).	51
Capítulo 3. Marco teórico disciplinar	53
3.1 Introducción analítica a las geometrías (vector en el plano)	53
3.2 Ecuación de la recta (plano)	67
3.3 Vectores en el espacio	79
Capítulo 4. Propuesta didáctica.....	127
Capítulo 5. Estructura del curso en línea.....	141
5.1 General	141

5.2 Unidad temática	142
Capítulo 6. Conclusiones.....	145
Referencias.....	147
Anexo A: Guía didáctica CV	149
Anexo B: Documento general del curso.....	153
Anexo C: Guía de actividades.	154
Anexo D. Calendario del curso.....	154
Anexo E. Instrumento de evaluación.	156

Índice de figuras

Figura 1. Ubicación de Álamo Temapache.....	15
Figura 2. Instalaciones del ITSAT	17
Figura 3. Organigrama del ITSAT	18
Figura 4. Curso en Moodle.....	20
Figura 5. Curso en Classroom	21
Figura 6. Instrucción en plataforma Classroom	21
Figura 7. Gráfica de tendencias en los indicadores de deserción, reprobación, eficiencia terminal y eficiencia de titulación. Fuente ITSAT.....	22
Figura 8. Resultados CENEVAL de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales	25
Figura 9. Andamiaje, Teoría de Bruner	27
Figura 10. Análisis del programa de Cálculo Vectorial	28
Figura 11. Entorno virtual Moodle	32
Figura 12. Entorno virtual Teams	33
Figura 13. Entorno de plataforma Classroom.....	33
Figura 14. Evolución del diseño instruccional.....	35
Figura 15. Modelo ADDIE	36
Figura 16. Componentes del aprendizaje (Pozo, 2013).....	43
Figura 17. Resultados/relaciones del aprendizaje (Pozo, 2013).....	43
Figura 18. Relación de resultados de aprendizaje y papeles distintos del maestro. En negrita está el actor principal en cada caso, mientras que los restantes corresponden a personajes secundarios, pero no por ello menos necesarios (Pozo,2013).....	45
Figura 19. Condiciones o requisitos para que se produzca un aprendizaje constructivo a partir de Ausubel, Novak y Hanesian (1978) (adaptado de Pozo, 2013).	47
Figura 20. Vector en el plano	54
Figura 21. Cantidades escalares.....	54
Figura 22. Cantidades vectoriales	55
Figura 23. Vectores en el plano y en el espacio.....	55
Figura 24. Representación de vectores en el plano	56
Figura 25. Representación del ejemplo 1 en GeoGebra.....	56
Figura 26. Suma de vectores	57
Figura 27. Resta de vectores	58

Figura 28. Multiplicación por un escalar	59
Figura 29. Sistema de coordenadas	60
Figura 30. Componentes de un vector.....	60
Figura 31. Vector director AB	60
Figura 32. Representación de la solución en GeoGebra	61
Figura 33. Representación ejemplo 1.....	62
Figura 34. Componentes rectangulares.....	63
Figura 35. Signos de las componentes rectangulares	63
Figura 36. Representación ejemplo 3.....	64
Figura 37. Componentes del ejemplo 3.....	65
Figura 38. Ejemplo 4	65
Figura 39. Problema 1	66
Figura 40. Problema 2.....	66
Figura 41. la recta en R^2	68
Figura 42. Elementos de una recta en R^2 . Fuente: autoría propia.	69
Figura 43. Formas de ecuación de la recta.....	73
Figura 44. Recta paralela y perpendicular a una recta en R^2 . Fuente: autoría propia.	77
Figura 45. Vector en el espacio	80
Figura 46. Vector cero	80
Figura 47. Representación de un vector en su forma geométrica y algebraica.....	81
Figura 48. Regla del triángulo y regla del paralelogramo.....	83
Figura 49. Método del polígono	83
Figura 50. Suma de vectores.....	84
Figura 51. Ley del triángulo	85
Figura 52. Ejemplo 4. Comprobación en GeoGebra	85
Figura 53. Componentes rectangulares.....	86
Figura 54. Ley de los senos.....	86
Figura 55. a Vectores unitarios en R^2 . b. Vectores unitarios en R^3	87
Figura 56. Ejemplo5	87
Figura 57. Representación en GeoGebra ejemplo 12.....	91
Figura 58. Ángulos directores.....	92
Figura 59. Paralelepípedo	95
Figura 60. Problema 1	97

Figura 61. Los vectores que representan las velocidades del avión u y el viento de cola v del problema 2.	97
<i>Figura 62. Recta en el espacio. Fuente: Autoría propia.....</i>	<i>99</i>
Figura 63. Ecuación vectorial	101
Figura 64. Representación ejemplo 2 en GeoGebra	102
Figura 65. Representación ejemplo 3 en GeoGebra. Fuente: autoría propia.....	104
<i>Figura 66. Punto (P) que corta al plano xy en GeoGebra.....</i>	<i>105</i>
Figura 67. Intersección GeoGebra. Fuente Autoría propia.	109
Figura 68. Representación de un plano en el espacio.....	110
Figura 69. Representación ejemplo 6 en GeoGebra. Fuente autoría propia.....	112
Figura 70. Representación ejemplo 7. Fuente: autoría propia.	114
Figura 71. Graficación de un plano en el espacio.....	115
Figura 72. Ecuación de la recta en el plano.	117
Figura 73. Ecuación del plano que contiene 2 rectas. Fuente: autoría propia	118
Figura 74. Representación ejemplo 11. Fuente: autoría propia.	120
Figura 75. Par de torsión.....	121
Figura 76. Par de torsión para problema 1	121
Figura 77. Representación problema	123
Figura 78. Descomposición en vectores.....	124
Figura 79. Descomposición vectorial.....	125
Figura 80. Aprendizaje verbal y teorías del aprendizaje	127
Figura 81. Aprendizaje procedimental y teorías del aprendizaje	128
Figura 82. Aprendizaje verbal/procedimental unidad 1 de Cálculo Vectorial	129
Figura 83. Diseño de la guía/ instrumentación didáctica de Cálculo Vectorial. Unidad 1.....	130
Figura 84. Calendario del curso	131
Figura 85. Curso Cálculo vectorial en Classroom.....	132
Figura 86. Curso Cálculo vectorial en Moodle	132
Figura 87. Curso cálculo vectorial en Microsoft Teams	133
Figura 88. Lista de cotejo para evaluar curso en línea. Fuente: TECNМ.....	134
Figura 89. Desarrollo de curso en línea. Paso 1 Fuente: CONOCER.....	135
Figura 90. Desarrollo de cursos en línea. Paso 2. Fuente: CONOCER.....	136
Figura 91. Desarrollo de cursos en línea. Paso 3. Fuente: CONOCER.....	136
Figura 92. Lista de cotejo para problemario. Fuente: Autoría propia.	138
Figura 93. Lista de cotejo para práctica. Fuente: Autoría propia.	139

Figura 94. Integración Modelo ADDIE, estándar 366 y resultados de aprendizaje de Pozo(2013). Fuente: Autoría propia.....	140
Figura 95. Generales. Plataforma classroom.....	141
Figura 96. Descripción de la actividad. Classroom.	143
Figura 97. Descripción de actividad. Moodle	143
Figura 98. Estructura de un curso en línea. Autoría propia.....	144

Índice de tablas

Tabla 1.	Servicio de Información y Estadística Agroalimentaria y Pesquera.....	16
Tabla 2.	Desarrollo educativo en la región.	16
Tabla 3.	Personal ITSAT.....	19
Tabla 4.	Tendencias de índices asociados a la trayectoria escolar por cohorte generacional.....	22
Tabla 5.	Matrícula de estudiantes 2020.....	23
Tabla 6.	Diferencias entre aprendizaje convencional y aprendizaje basado en problemas.....	51

Capítulo 1. Introducción

En este capítulo se realiza un análisis general sobre cómo se encuentra la institución, personal docente, estudiantes e infraestructura para el manejo de cursos en línea; y con ello empezar abordar la problemática a resolver.

1.1 Descripción de la problemática

Álamo Temapache, está ubicado en el norte de Veracruz, zona citrícola en su mayor parte, por lo que es denominada la capital de la naranja por decreto gubernamental.

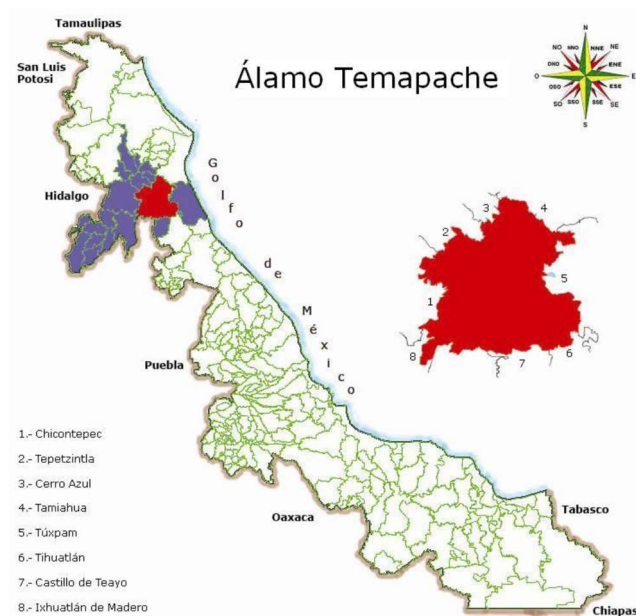


Figura 1. Ubicación de Álamo Temapache

Es el mayor productor de esta fruta a nivel nacional, ubicado en el 2o. lugar a nivel mundial, según datos del SAGARPA, 2017 se tiene lo siguiente (Tabla 1):

Tabla 1. Servicio de Información y Estadística Agroalimentaria y Pesquera.

Principales cultivos	Superficie sembrada (Hectáreas)	Superficies cosechadas (hectáreas)	Volumen (toneladas)	Valore (miles de pesos)
Total	68,661.8	67,961.8	845,973.2	1,577,754.5
Naranja	43,762.5	43,100.5	704,301.2	1,126,177.6
Maíz grano	16,885.0	16,885.0	32,258.0	136,163.9
Tangerina	3,603.0	3,583.0	54,620.3	183,930.0

Fuente: SAGARPA

Por ello el municipio cuenta con la industria extractora de jugo, compuesta por varias empresas dedicadas a este ramo conocidas como "jugueras", como lo son: FRUTALAMO, CITROMAX, CITROSOL, CITROFUT, INDUMESA, entre las más importantes.

En cuanto a desarrollo educativo por parte de Sistema de Información Municipal 2019, se presentan los siguientes datos (véase tabla 2):

Tabla 2. Desarrollo educativo en la región.

CARACTERÍSTICAS DEL SECTOR EDUCATIVO, INICIO DE CURSOS 2018-2019						
Nivel educativo	Escuelas	Docentes	Grupos	Alumnos		
				Hombres	Mujeres	Total
Total	451	1,743	1,537	14,228	14,001	28,229
Educación inicial	0	0	0	0	0	0
Educación especial	3	13	4	68	60	128
Preescolar	156	262	262	1,754	1,741	3,495
Primaria	178	739	739	5,826	5,733	11,559
Secundaria	66	379	320	2,934	2,817	5,751
Profesional técnico	0	0	0	0	0	0
Bachillerato	34	211	184	2,175	2,284	4,459
Técnico superior universitario	0	0	0	0	0	0
Normal	0	0	0	0	0	0
Licenciatura Univ. y Tec.	1	109	0	1,238	952	2,190
Posgrado Univ. y Tec.	0	0	0	0	0	0
Educación para adultos	1	7	0	87	239	326
Formación para el trabajo a/	12	23	28	146	175	321

a/ Corresponde a la Estadística de Fin de Cursos 2018

Fuente: Secretaría de Educación de Veracruz.

Como puede apreciarse a nivel licenciatura sólo se cuenta con una escuela, la cual empezó a funcionar el *07 de febrero de 2000* en el municipio de Álamo Temapache, Veracruz, con el nombre de **Instituto Tecnológico Superior de Álamo Temapache (ITSAT)**, cuyo propósito es contribuir a impulsar y consolidar el Programa de Desarrollo de la Educación Superior Tecnológica en el estado.



Figura 2. Instalaciones del ITSAT

Misión

Formar Profesionistas con capacidad tecnológica y calidad humana, que apliquen sus conocimientos para el desarrollo integral de la sociedad.

Visión

Ser una institución de prestigio académico generando investigación científica y tecnológica que contribuya al desarrollo Regional y Nacional.

La estructura organizacional del ITSAT se encuentra integrada por los siguientes departamentos (véase figura 3):

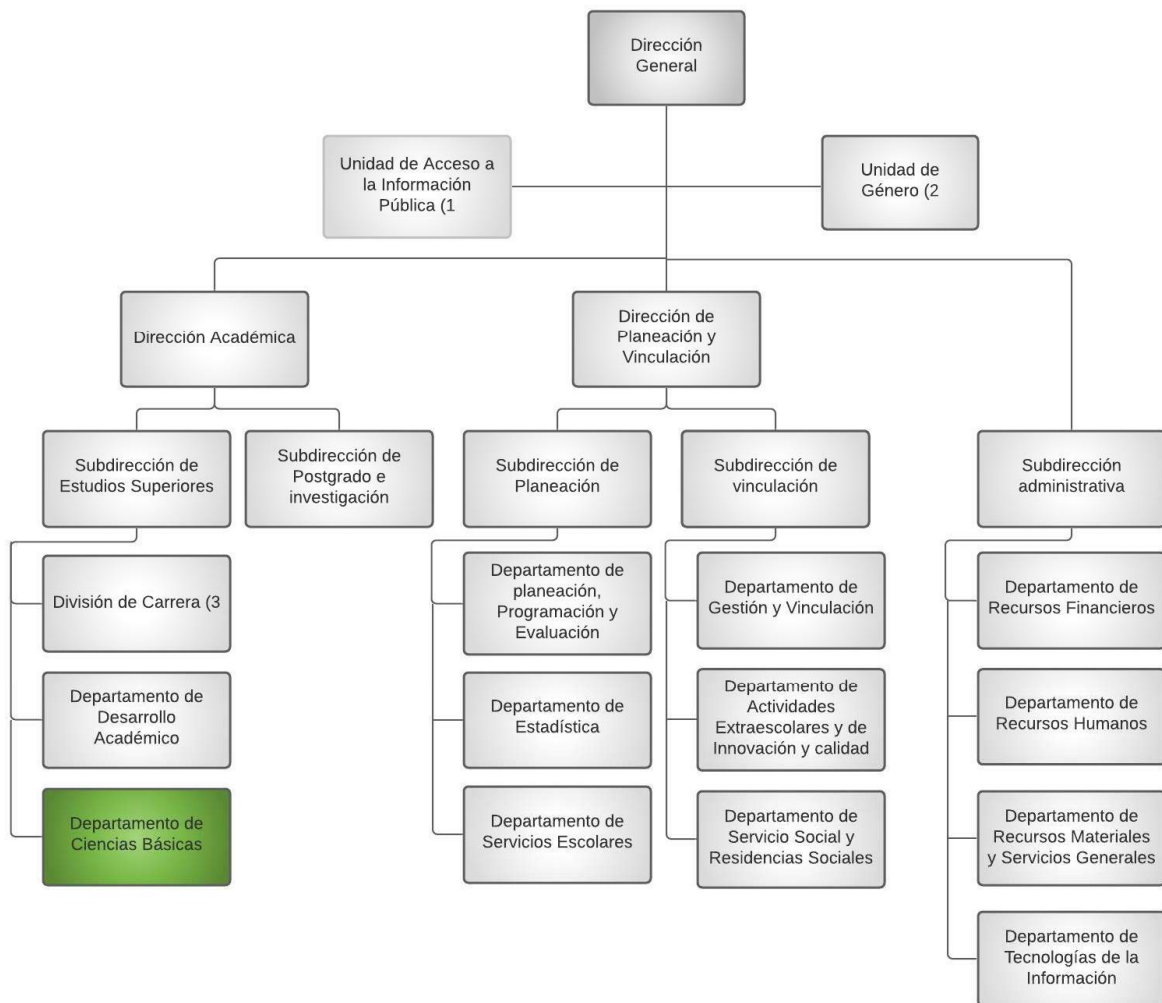


Figura 3. Organigrama del ITSAT

Se imparten 6 programas educativos en diversas modalidades y extensiones de Álamo y Tuxpan:

- ☐ Ingeniería ambiental
- ☒ **Ingeniería en Sistemas computacionales**
- ☐ Ingeniería en Industrias alimentarias.
- ☐ Ingeniería en Administración
- ☐ Ingeniería Industrial
- ☐ Ingeniería en Tecnologías de la información

1.1.1 Personal académico del ITSAT.

La **plantilla de profesores del ITSAT actualmente es de 64 profesores** de los cuales el 67.19% son profesores con posgrado y 71.88% son profesores de tiempo completo, de la combinación, se tiene que 36 son profesores de tiempo completo con posgrado. Con el reconocimiento de perfil deseable se tienen, 13 profesores. Como se puede apreciar en la tabla 3.

Tabla 3. Personal ITSAT.

Sexo	Total de profesores	Profesores con posgrado	Profesores de tiempo completo	Profesores de tiempo completo con posgrado	Profesores con perfil deseable
Mujeres	35	25	23	20	6
Hombres	29	18	23	16	7
Suma	64	43	46	36	13

Fuente ITSAT.

El ITSAT cuenta con 5 docentes e investigadores (2 mujeres y 3 hombres), de los cuales el 100% son de tiempo completo y tiene posgrado.

1.1.2 Cursos de formación docente:

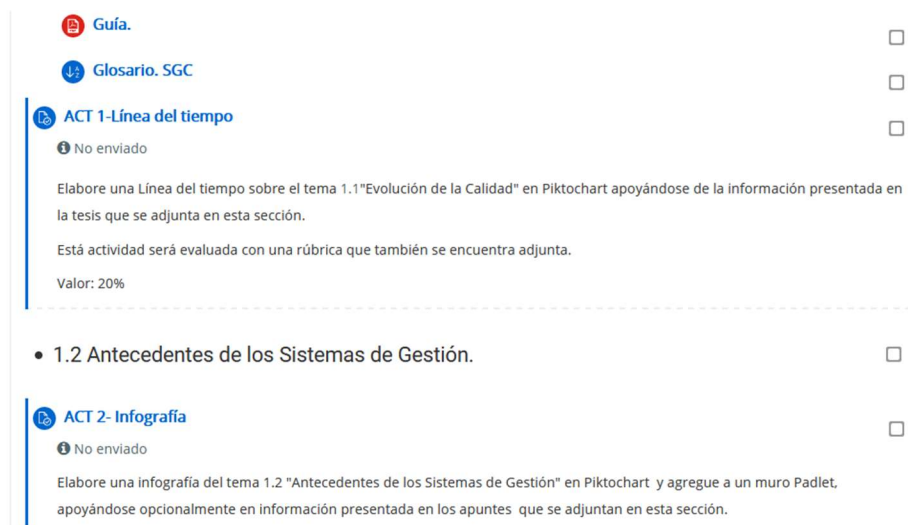
Para manejo de tecnologías o plataformas educativas (según informe de la directora, octubre 2021), se llevaron a cabo los siguientes **Cursos de Formación** en el año 2021:

- ☐ 60 docentes participaron en el diplomado denominado, “**Diplomado Recursos Educativos en Ambientes Virtuales de Aprendizaje (DREAVA)**”. De los cuales sólo 54 lo aprobaron entre el 2020, 2021 y 2022.
- ☐ 37 docentes participaron en el curso denominado “**Introducción a las diferentes plataformas para cursos en línea**”, como parte del Uso de las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- ☐ Aproximadamente 15 docentes terminaron el diplomado “**Microsoft Teams 4ª Emisión: Alternancia de dinámicas de enseñanza y aprendizaje para la educación híbrida y remota**” como parte también de actualización docente y poder incorporar una nueva plataforma educativa: Teams.

1.1.3 Plataformas educativas:

Debido a la pandemia de la enfermedad COVID-19 causada por el virus SARS-COV-2, el cuerpo docente del ITSAT trabaja con el uso de Tecnología Educativa a través de Google **Classroom** y de su plataforma **Moodle** que se encuentra en: <https://virtualitsat.com/>, y en menor medida con **Teams**, en la cual están habilitados los cursos que se imparten completamente a distancia.

A continuación, se muestran algunos ejemplos de curso en línea:



The screenshot displays a Moodle course interface. At the top, there are three items: 'Guía.' with a red icon, 'Glosario. SGC' with a blue icon, and 'ACT 1-Línea del tiempo' with a blue icon. To the right of these items are three empty checkboxes. Below 'ACT 1-Línea del tiempo', there is a status 'No enviado' and a description: 'Elabore una Línea del tiempo sobre el tema 1.1 "Evolución de la Calidad" en Piktochart apoyándose de la información presentada en la tesis que se adjunta en esta sección. Esta actividad será evaluada con una rúbrica que también se encuentra adjunta. Valor: 20%'. A dashed line separates this from the next section, '1.2 Antecedentes de los Sistemas de Gestión.', which also has an empty checkbox to its right. Below this, there is another activity 'ACT 2- Infografía' with a blue icon, a status 'No enviado', and a description: 'Elabore una infografía del tema 1.2 "Antecedentes de los Sistemas de Gestión" en Piktochart y agregue a un muro Padlet, apoyándose opcionalmente en información presentada en los apuntes que se adjuntan en esta sección.' To the right of this activity is another empty checkbox.

Figura 4. Curso en Moodle



Figura 5. Curso en Classroom

En estos cursos en línea, en su mayoría no siguen un diseño instruccional y las instrucciones son imprecisas como se muestra el siguiente ejemplo (figura 6):



Figura 6. Instrucción en plataforma Classroom

1.1.4 Estudiantes:

A continuación, se presenta un análisis de las estadísticas de las tres últimas cohortes generacionales de la Ingeniería en Sistemas Computacionales, dicha información se concentra en la Tabla 4 y se visualiza gráficamente en la figura 7, la cual es proporcionada por el departamento de Servicios Escolares y complementada por el departamento de Ciencias Básicas.

Tabla 4. Tendencias de índices asociados a la trayectoria escolar por cohorte generacional.

Cohorte	Estudia- ntes por cohorte	Egresados por cohorte	Titulados por cohorte	Índice de deserción	Índice de reprobación	Eficiencia terminal	Porcentaje de titulación
2012 - 2018	35	9	8	74,29%	15,57%	25,71%	22,86%
2013 - 2019	29	7	1	75,86%	22.5%	24,14%	3,45%
2014 - 2020	24	13	3	45,83%	13.4%	54,17%	12,50%

Fuente ITSAT.

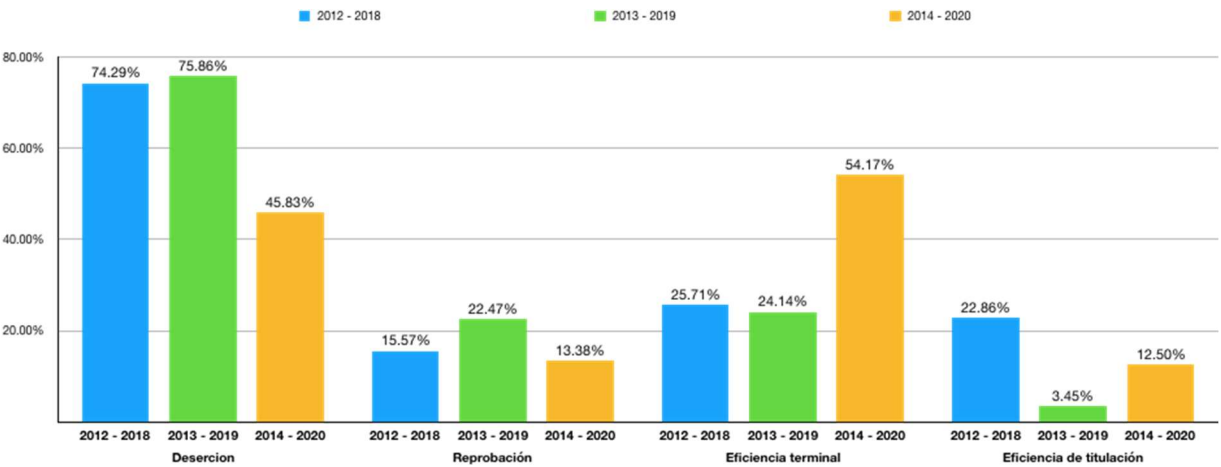


Figura 7. Gráfica de tendencias en los indicadores de deserción, reprobación, eficiencia terminal y eficiencia de titulación. Fuente ITSAT.

Se observa que el índice de reprobación (Figura 7) tiene un comportamiento que si bien el cohorte generacional 2013 – 2019 tuvo un incremento del 6.9 puntos porcentuales con respecto a su cohorte generacional anterior, es decir de 15.57% a 22.47%, el cohorte generacional 2014 - 2020 se decremento 9.09 puntos porcentuales con respecto a su generación anterior, es decir de 22.47% a 13.38%, y 2.19 puntos porcentuales con respecto a la cohorte 2013 – 2019, esto gracias a las asesorías académicas que coordina el Departamento de Ciencias Básicas en conjunto con el Programa de Tutorías.

En cuanto a los índices de deserción durante las cohortes 2012 – 2018 y 2013 –2019 los porcentajes fueron altos con 74.29% y 75.86% respectivamente, de acuerdo con datos recabados por el Departamento del Orientación Educativa, se detectó que el factor que incide de manera importante en la toma de decisión del alumno de abandono de sus estudios, es el económico, por lo cual se intensifico la promoción de los programas de becas derivando que en la cohorte generacional de 2014 – 2020 se redujera en 20.69 puntos porcentuales, es decir que el índice de deserción fue de 45.38%, actualmente se están intensificando aún más la difusión y gestión de los programas de becas y de las estrategias de acompañamiento (entrega de guías didácticas) a alumnos en situación adversa, y que han visto afectada aún más el aspecto socioeconómico por contingencia, derivada por la pandemia de la enfermedad COVID-19 causada por el virus SARS-COV-2. Sin embargo; aún hay diferencias entre los que ingresan, los que egresan y los que logran titularse.

Para el **ciclo escolar 2020-2021 la matrícula del ITSAT asciende a 1868 estudiantes**, distribuidos por programa y por sexo, como se muestra en la tabla 5, de acuerdo con el informe de la dirección del plantel, octubre 2020:

Tabla 5. Matrícula de estudiantes 2020.

Programa	Alumnos de nuevo ingreso			Alumnos reinscritos			Total		Total matrícula
	H	M	Suma	H	M	Suma	H	M	
Ing. en Industrias Alimentarias	8	14	22	46	52	98	54	66	120

Ing. en Sistemas Computacionales	28	17	45	72	31	103	100	48	148
Ing. Industrial	152	66	218	409	205	614	561	271	832
Ing. en Administración	44	49	93	95	205	300	139	254	393
Ing. Ambiental	16	38	54	109	110	219	125	148	273
Ing. en Tic's	16	11	27	45	30	75	61	41	102
Suma	264	195	459	776	633	1409	1040	828	1868

Fuente ITSAT

De acuerdo con el reporte del departamento de Ciencias Básicas, en general, los alumnos provenientes de los sistemas de Telebachillerato, el 87% aproximadamente ha cursado la especialidad Económico-Administrativa, y el 13% la especialidad de Ciencias Exactas, y el promedio con el que ingresan es de aproximadamente de 7.8.

Los estudiantes provienen de los municipios de Álamo, Tuxpan, Tihuatlán, Tamiahua, Tepetzintla y en menor medida de Chicontepec, Cerro Azul y Naranjos, siendo la base estudiantil que predomina la de los sistemas de Telebachilleratos de estas zonas.

Durante el mes de septiembre del 2020, el examen de admisión **EXANII II** (Examen Nacional de Ingreso a la Educación Superior) de **CENEVAL** (Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior), aplicado a los alumnos de nuevo ingreso proporcionó los siguientes datos, el 19.05% de los alumnos sustentantes alcanzó un nivel satisfactorio, mientras que el 76.19 % obtuvo un nivel insatisfactorio y un 4.76% sin dictamen en la disciplina de matemáticas, en la materia de física, el 14.29% de los alumnos sustentantes alcanzó un nivel satisfactorio, mientras que el 80.95 % obtuvo un nivel insatisfactorio (véase figura 8).

INGENIERÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES						21 DE SEPTIEMBRE DE 2020					
No.	Folio	Nombre	Examen de Admisión					Examen Diagnóstico Ingenierías y Tecnología			
			ICNE	PMA	PAN	ELE	CLE	MAT	FIS	LES	ING
1	264722707	CRUZ LOPEZ LUIS ANGEL	1030	964	1084	1012	1060	S	S	S	I
2	264735700	TORRES JULIAN ENRIQUE	1012	1012	1036	964	1036	I	S	S	S
3	264731101	PULIDO CASTILLO DAVID ANDRES	1012	916	1036	1060	1036	I	I	S	S
4	264721902	RAMOS HERNANDEZ JESUS EMMANUEL	994	1084	964	964	964	I	I	I	I
5	264725503	SOTO MARTINEZ CITLALI	970	964	1036	964	916	S	S	I	S
6	264725400	RUIZ CRUZ AMIZADAI	958	988	844	1060	940	I	I	I	I
7	264724602	ROMERO TORRES JESUS GABRIEL	952	868	988	1012	940	I	I	S	S
8	264726807	MARTINEZ MARTINEZ SANDRA LIZBET	946	1012	988	916	868	I	I	I	I
9	264730205	ANASTACIO HERNANDEZ LUIS DAVID	946	988	988	916	892	I	I	S	S
10	264728403	LARA VILLEGAS OSCAR DE JESUS	946	940	964	940	940	I	I	I	I
11	264736009	LOPEZ JUAREZ GEOVANI	922	940	964	916	868	I	I	I	I
12	264729700	ENRIQUEZ LOYA JOSE ANGEL	910	916	844	1012	868	I	I	I	I
13	264734200	BAUTISTA AGUILERA ISIDRO	904	916	820	868	1012	I	I	I	I
14	264722805	CASTELLANOS PEREZ ALESSANDRO	892	868	892	916	892	I	I	I	I
15	264724401	MARTINEZ SILVERIO GONZALO	892	844	940	916	868	SD	SD	SD	SD
16	264720801	NOGALES CRUZ YAZMIN	886	988	796	892	868	I	I	I	I
17	264726905	ASCENSION BLANCO PAOLA	886	868	940	964	772	I	I	S	I
18	264728000	GUZMAN LENZ GILDARDO	874	868	868	916	844	S	I	I	S
19	264722402	MARTINEZ CAMPOS FRANCISCO DE OLIVA	868	940	772	868	892	I	I	I	S
20	264731603	ESCALONA OLARTE ERIKA	862	820	796	964	868	S	I	I	I
21	264724706	RAMOS BALTAZAR ANA CARMEN	856	820	820	892	892	I	I	I	I
Ver nota explicativa del significado de las columnas al final del listado.							Porcentaje Satisfactorio (S)	19.05	14.29	28.57	33.33
							Porcentaje Insatisfactorio (I)	76.19	80.95	66.67	61.90
							Porcentaje Sin dictamen (SD)	4.76	4.76	4.76	4.76

Figura 8. Resultados CENEVAL de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales

La escala denominada índice Ceneval, que comienza en los 700 puntos y alcanza los 1,300 como máxima, y debe considerarse que está diseñado para que la mayoría de la población que lo sustenta logre un puntaje cercano a 1,000. Y como pudo apreciarse en los datos anteriores, un alto porcentaje no logro acercarse a ese puntaje. ¿Entonces cómo nos llegan los estudiantes al ITSAT?

Cabe resaltar, que todos los estudiantes **son admitidos** sin importar el puntaje que obtengan en el **EXAMII II**. Por lo que éstos puedan presentar problemas como reprobación, deserción, baja eficiencia terminal, bajo porcentaje de titulación, etc., como se apreció en las cohortes anteriores, los cuales podría atribuirse a que no tienen los conocimientos previos suficientes para vincular con las materias que cursa en el nivel correspondiente, ya que en su mayoría (76.19 %, 80.95 %) no aprueba matemáticas y física respectivamente del nivel medio superior. Moreno (2005, pag.17) concluye que tanto Bruner como Ausubel “sostienen que el aprendizaje se produce por interacción de los esquemas mentales previos del sujeto con la nueva información proveniente del medio o contexto.”

En mi caso, imparto la materia de Cálculo vectorial y comienzo con los temas que marca el programa de estudios, de manera que sólo se describe el concepto, se realizan ejercicios

y se resuelven problemas, sin embargo; me doy cuenta de que el estudiante necesita un repaso de conocimientos previos de cada unidad temática, pero se pierde tiempo explicándolos y no se avanza en el temario que corresponde, por lo que en su mayoría es mejor cumplir con lo que viene en el programa, sin importar si hubo o no aprendizaje.

En este caso, para efectos de este trabajo, sólo me enfocaré a la carrera de **Ingeniería en Sistemas Computacionales**, en la materia de Cálculo Vectorial en la unidad 1, específicamente en la ecuación de la recta y ecuación del plano, para mostrar que se pueden repasar los conocimientos previos mediante el uso de tecnologías para apoyar el aprendizaje, sin que afecte el tiempo calendarizado del temario propio de la asignatura.

1.2 Justificación

Recapitulando desde la problemática, resalto las siguientes particularidades que tiene el ITSAT y que dan origen a este trabajo:

- ❑ Un bajo porcentaje de estudiantes aprueba el examen de admisión **EXANII II** (Examen Nacional de Ingreso a la Educación Superior) de **CENEVAL** (Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior), sin embargo, todos son aceptados.
- ❑ Los cursos en línea no están almacenados en una misma plataforma educativa, ni siguen un diseño instruccional, aunque el ITSAT cuenta con plataforma Moodle y 54 maestros ya han aprobado el diplomado DREAVA (Diplomado en Recursos Educativos en Ambientes Virtuales de Aprendizaje), y 7 más en el diplomado “Microsoft Teams 4ª Emisión: Alternancia de dinámicas de enseñanza y aprendizaje para la educación híbrida y remota”.
- ❑ Derivado de la enfermedad COVID-19 causada por el virus SARS-COV-2, ha obligado a recurrir a las clases en línea, sin embargo, los estudiantes no todos están en las mismas condiciones de conectividad o recursos tecnológicos, por lo que será necesario un reforzamiento de conocimientos previos en cada unidad temática, para así vincular con los contenidos del programa educativo correspondiente, específicamente de Cálculo vectorial.

Entonces, una buena parte de los docentes, están capacitados para implementar sus cursos en línea en las plataformas Moodle y Teams, como parte del B-Learning. Además, de acuerdo a las condiciones de los estudiantes del ITSAT, sugiero que se debe rescatar las actividades previas de cada tema para lograr el andamiaje cognitivo que propone Bruner (Figura 9) y que se adapta a Vygotsky en su visión constructivista adecuado a la “zona de desarrollo próximo”, en donde el docente se dedica a elaborar material para que el estudiante pueda realizar una actividad o tarea, logrando una mediación hacia estructuras del conocimiento más elaboradas propias de la materia (Schunk, 2012).



Figura 9. Andamiaje, Teoría de Bruner

En el presente trabajo se elabora una propuesta didáctica, aplicada en el tema de ecuación de la recta (forma vectorial) y ecuación del plano de la unidad 1 de Cálculo vectorial, para llevarse a cabo mediante un curso en la modalidad B-Learning, siguiendo el diseño instruccional del modelo ADDIE y el estándar 366 de CONOCER, complementado con los resultados de aprendizaje verbal y procedimental que sugiere Pozo(2013), cuyo análisis de temas principales de acuerdo con el programa de Cálculo Vectorial (TECNM, Cálculo Vectorial., 2016), se muestra en la figura 10.

Competencia de Cálculo Vectorial: Aplica los principios y técnicas básicas del cálculo vectorial para resolver problemas de ingeniería del entorno.

Competencia específica de la unidad 1 (objetivos de aprendizaje):

Conoce y desarrolla las propiedades de las operaciones con vectores para resolver problemas de aplicación en las diferentes áreas de ingeniería.

Determina ecuaciones de rectas y planos del entorno para desarrollar la capacidad de modelado matemático.

1. Vectores en el espacio.

1.1 Definición de un vector en el plano y en el

espacio y su interpretación geométrica.

1.2 Álgebra vectorial y su geometría.

1.3 Producto escalar y vectorial.

1.4 Ecuación de la recta.

1.5 Ecuación del plano.

1.6 Aplicaciones.

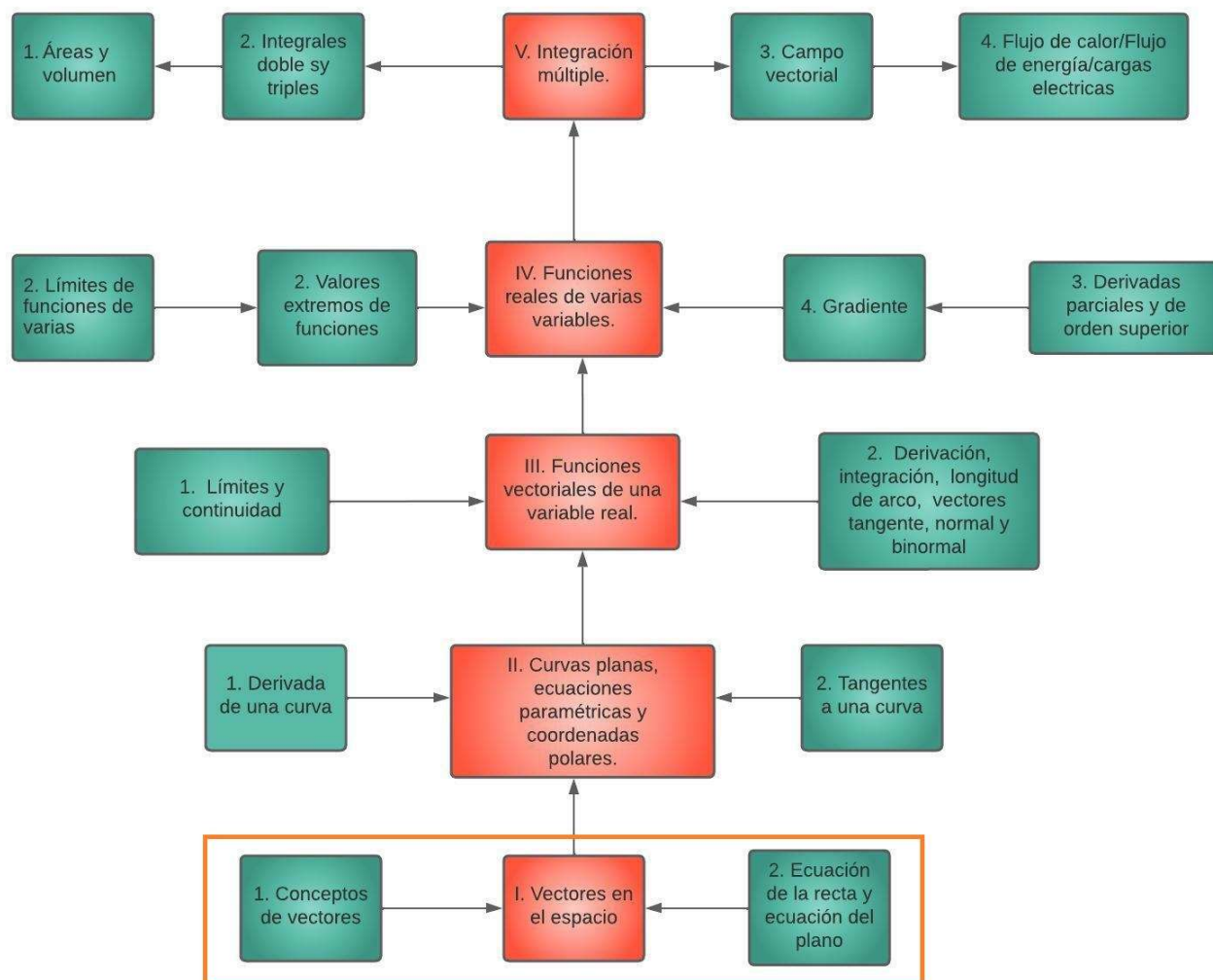


Figura 10. Análisis del programa de Cálculo Vectorial

El tema específicamente sería el de ecuación de la recta (forma vectorial) y ecuación del plano, de la unidad 1, y que sirve de base para las demás unidades. Para ello se requiere que el estudiante tenga conocimientos en vectores, elementos de una recta, ecuación de la recta, pendiente, ecuación general, graficación, etc. Conocimientos previos

que en mi caso o no son considerados o son explicados de manera muy rápida. En los capítulos 2 y 3 se especificarán más ampliamente el marco didáctico y marco disciplinar.

1.3 Objetivo General

Diseñar una propuesta didáctica complementaria sobre los temas de ecuación de la recta en su forma vectorial y ecuación del plano, en donde se incluya conocimientos previos para tratar de mejorar el aprendizaje de dichos contenidos de los estudiantes de Cálculo vectorial, **a través de un curso en la modalidad B_learning**, utilizando tanto el modelo de diseño instruccional ADDIE complementado con estándar 366 y los resultados de aprendizaje que sugiere Pozo (2013) para diseñar las actividades del curso.

1.3.1 Objetivos específicos:

1. Reestructurar, de una manera mejor sustentada y profesional, la instrumentación didáctica del programa de Cálculo vectorial en las actividades de apertura, desarrollo y cierre en **los temas** de ecuación de la recta en su forma vectorial y ecuación del plano, en donde se incluyan, los conocimientos previos de dichos **contenidos**; logrando el andamiaje cognitivo hacia el nivel necesario para comprenderlos.
2. Elaborar material didáctico de acuerdo con el estándar 366 de CONOCER y el modelo de diseño instruccional ADDIE adaptado por el TECNM para actividades de enseñanza de cursos en línea.
3. Diseñar una propuesta didáctica, mediante estrategias de enseñanza-aprendizaje en los niveles verbal (información verbal, conceptos y cambio conceptual) y procedimental que propone Pozo (2013), en conjunto con el modelo de diseño instruccional ADDIE.
4. Desarrollar el curso en línea, es decir, subir a plataforma las actividades y recursos, esto es poner la propuesta didáctica en línea, necesarias para llevar a cabo en la modalidad B-Learning. Lo anterior se puede implementar en varias plataformas de aprendizaje: Teams, Moodle o Classroom, basado en el modelo ADDIE y el estándar 366 de CONOCER.

Resultados esperados:

- ☐ Estandarización de los cursos de Ciencias básicas en la modalidad B_Learning.
- ☐ Mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje utilizando TIC's y relacionando los conocimientos previos de la materia con los del programa educativo.
- ☐ Mayor interés en el aprendizaje de la materia de Cálculo Vectorial a través de la activación de los conocimientos previos.

1.4 Organización de la Tesina.

La tesina consta de seis capítulos. El primer capítulo titulado introducción, trata de la primera etapa del modelo ADDIE, y está relacionada con el análisis de los principales elementos, como son: estudiantes, docentes, infraestructura tecnológica, programa de la materia y el objetivo de este trabajo. El capítulo dos continua con el análisis del modelo ADDIE y se complementa con el estándar 366 de CONOCER, en él se mencionan las modalidades de educación a distancia, las principales teorías del aprendizaje y los resultados de aprendizaje que propone Pozo (2013). En el capítulo tres, se refiere a los contenidos disciplinares previos sobre vectores y ecuación de la recta en el plano, y a los que corresponden al programa de Cálculo vectorial de la unidad 1 denominada vectores en el espacio, como parte de la etapa de diseño del Modelo ADDIE y estándar 366. En el capítulo cuatro, trata de la propuesta para este trabajo, el cual siguiendo con el modelo ADDIE, es diseñar y desarrollar las actividades y recursos, complementándose con el estándar 366 de CONOCER, y al diseño instruccional que establece Pozo (2013). El capítulo cinco trata de la implementación del modelo ADDIE y el estándar 366 mediante la estructura de un curso en cualquier plataforma educativa bajo la modalidad B_learning; y por último, el capítulo seis son las conclusiones que relacionan el diseño instruccional de ADDIE con el estándar 366 de CONOCER y la importancia que tienen las teorías del aprendizaje propuestas por Pozo (2013), para aplicar a la práctica en el curso de Cálculo vectorial, en los temas de ecuación de la recta en su forma vectorial y ecuación del plano.

Capítulo 2. Marco teórico didáctico.

Enseguida presento los fundamentos teóricos que dan sustento a este trabajo, comenzando con modalidades de educación a distancia, diseño instruccional, posteriormente el modelo ADDIE complementado con el estándar 366 de CONOCER, y las teorías del aprendizaje para los aprendizajes verbal y procedimental que establece Pozo (2013).

2.1 Modalidades de educación en línea

En la educación en línea, el estudiante puede acceder a los recursos y actividades desde cualquier sitio, siempre y cuando tenga acceso a Internet y los dispositivos adecuados para llevar a cabo las actividades requeridas. Existen varias propuestas para el aprendizaje en línea, pero se pueden clasificar principalmente en: e-learning, b-learning y m-learning, las cuales se especifican brevemente a continuación.

2.1.1 E-learning.

Es una alternativa de formación para el desarrollo de la educación continua, sobre todo para personas que desean estudiar y trabajar, y en donde no existen las barreras espacio temporales, y que ven en las TIC una herramienta de comunicación para el aprendizaje.

En el e-learning el proceso formativo tiene lugar totalmente a través de un aula o entorno virtual también llamado plataforma de aprendizaje, en donde interaccionan tanto el profesor como estudiante, ya sea de forma síncrona y asíncrona, a través de recursos que ofrece la plataforma tecnológica y de los que proporciona el docente como actividades y materiales de enseñanza de un curso en específico (Murcia Rodríguez, 2020).

En esta modalidad el estudiante deberá ser autodidacta, responsable de su propio aprendizaje, así como perseverante, poseer madurez vocacional y habilidades en el dominio de herramientas tecnológicas.

Las habilidades del docente en línea, además del conocimiento de su área:

- ☐ Diseño instruccional.
- ☐ Pedagogía.
- ☐ Habilidades comunicacionales.

- ☐ Técnicas didácticas.
- ☐ Habilidades tecnológicas.

Existen diversos entornos virtuales o plataforma educativas de acuerdo con Murcia (2020), entre ellas están:

- ☐ Moodle: LMS de código abierto (es posible modificar el código) que permite crear cursos con un enfoque constructivista. Se distribuye como software libre y gratuito y es el más utilizado en el mundo. Contiene herramientas muy variadas que permite la interacción de forma síncrona y asíncrona (figura 11).

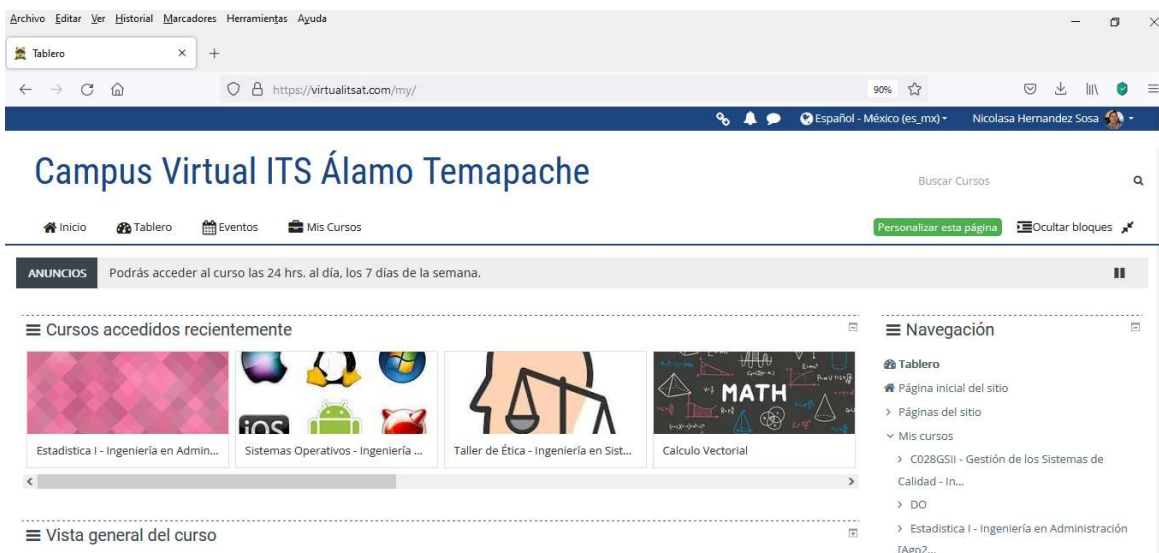


Figura 11. Entorno virtual Moodle

- ☐ Blackboard: Plataforma de código cerrado con licencias de pago. Es una de las más utilizada en el mundo, ya que además de que puede alojar contenidos y con interacción síncrona y asíncrona, dispone de aplicaciones para dispositivos móviles.
- ☐ Microsoft Teams: Permite alojar cursos en línea con diferentes aplicaciones, en donde estudiantes, profesores, educadores y personal del centro pueden reunirse, trabajar juntos, crear contenidos y compartir recursos en Office 365 Educación (figura 12).

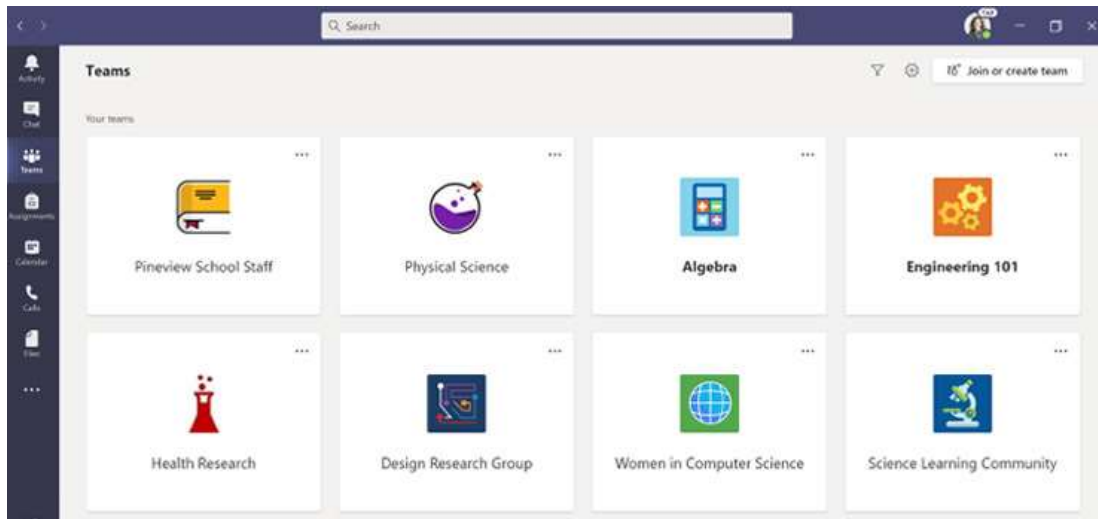


Figura 12. Entorno virtual Teams

- ❑ Classroom: es una herramienta creada por Google en 2014, y destinada exclusivamente al mundo educativo. Su misión es la de gestionar un aula de forma colaborativa a través de Internet, siendo una **plataforma** para la gestión del aprendizaje o Learning Management System (LMS). Es gratuita, aunque limitada en recursos síncronos (Véase figura 13).

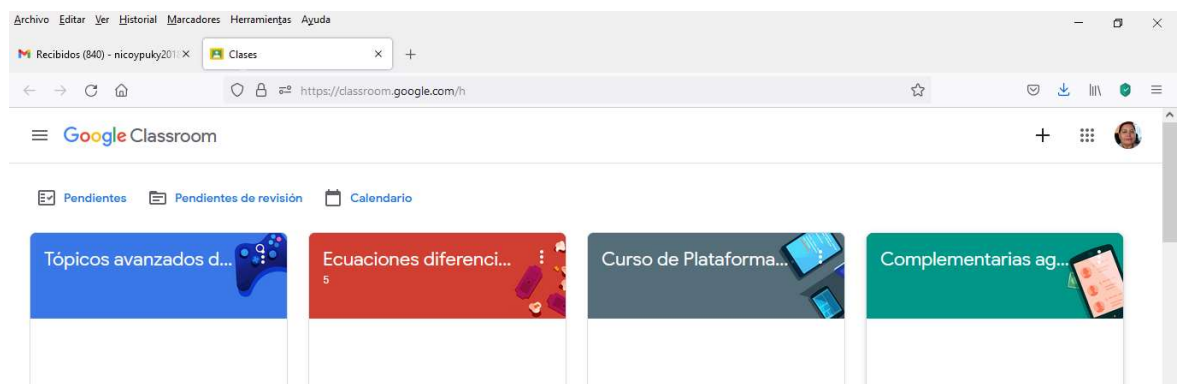


Figura 13. Entorno de plataforma Classroom

- ❑ Edmodo. Es una plataforma sin costo con accesos para padres, profesores y docentes. Los docentes pueden crear sus cursos de manera gratuita en la plataforma que se encuentra en línea, ahí tienen posibilidades de colocar contenidos, proponer actividades de aprendizaje y realizar evaluaciones. Cuenta con posibilidades de compartir contenidos con otros profesores y estudiantes, de tal manera que Edmodo también se convierte en una red de colaboración y aprendizaje

2.1.2 B-learning.

Es una alternativa de formación denominada Blended – learning o mixta, ya que combina las modalidades e-learning y presencial. De acuerdo con Murcia (2020). En esta modalidad el estudiante desarrolla un porcentaje de clases a partir de actividades en línea (con apoyo de alguna plataforma virtual) y complementa su proceso formativo de manera presencial. Normalmente el tiempo presencial es para resolver dudas con el profesor, y trabajar en ejercicios prácticos o en actividades grupales.

Este tipo de modalidad tiene como objetivo optimizar el proceso de enseñanza -a aprendizaje a través de la combinación de tecnología (virtual) con estrategias didácticas presenciales (físicas).

Las habilidades docentes deben ser las mismas que las de E-learning.

2.1.3 M-learning

El aprendizaje móvil o mobile-learning (m-learning), es la modalidad que permite un aprendizaje y dinamización a través dispositivos móviles (celulares, tablets, etc.) con acceso a una plataforma virtual desde cualquier lugar o en cualquier momento, ya sea a los materiales de estudio, actividades y herramientas que les permite interactuar con los profesores y otros compañeros.

Las habilidades del docente y estudiante son las mismas que las de e-learning.

Las plataformas que tradicionalmente se emplean para el aprendizaje en línea o mixto también son útiles para el aprendizaje móvil, como es el caso de Moodle, Edmodo o Blackboard, las cuales ofrecen versiones móviles, incluso Edmodo y Blackboard cuentan con su app para dispositivos móviles (Murcia, 2020).

2.2 Diseño instruccional.

El diseño instruccional es necesario en cualquier modalidad, para organizar de una manera sistemática no sólo la enseñanza sino también el aprendizaje, y se debe caracterizar por ser procesos integrales y holísticos, dialécticos, creativos y flexibles (Cruz Abeyro, 2017). En otras palabras, el diseño instruccional representa el puente, la conexión entre **las teorías del aprendizaje y su puesta en práctica**, y reflejará el enfoque teórico que posea

el diseñador instruccional respecto a los procesos de enseñanza y aprendizaje (Cruz Abeyro, 2017).

Éste ha evolucionado a la par que las tecnologías y con los ajustes necesarios de las teorías que las sustentan. Como puede apreciarse en el siguiente mapa conceptual (Véase figura 14).

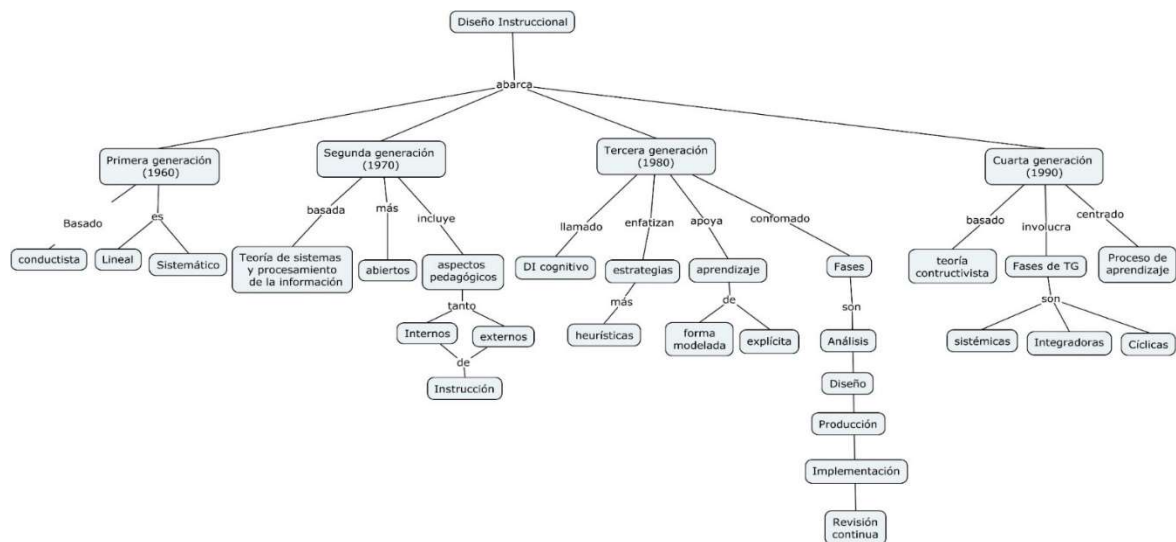


Figura 14. Evolución del diseño instruccional

2.3 Modelo ADDIE

ADDIE, es un modelo flexible e iterativo que destaca por ser un modelo de procesos y es el más ampliamente utilizado en el diseño instruccional, el cual es propuesto por el TECNM como modelo para la educación a distancia (TECNM, Modelo de Educación a Distancia, 2015).

El modelo ADDIE su nombre obedece al acrónimo **analyze** (análisis), **design** (diseño), **develop** (desarrollo), **implement** (implementación) y **evaluate** (evaluación); que representan las fases de este modelo y que constituyen los pasos indispensables en todo proceso de diseño instruccional, enfocado en la formación inicial del docente y la integración e-learning educativa. En la figura 15 se muestra el modelo ADDIE.

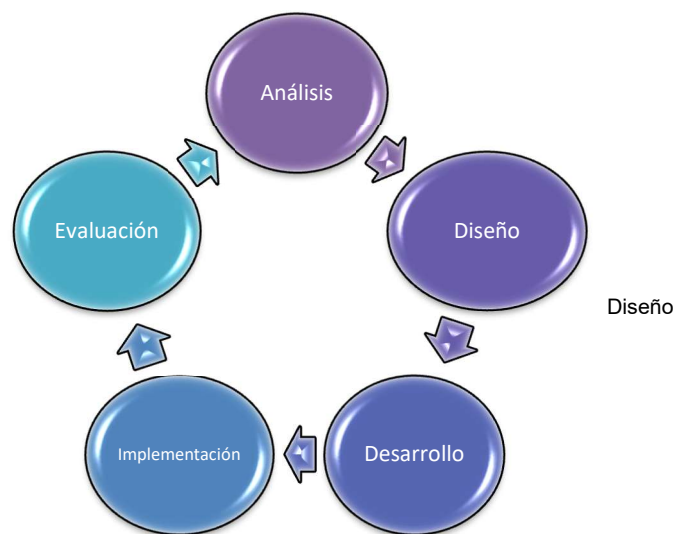


Figura 15. Modelo ADDIE

ADDIE es un proceso interactivo completo con los pasos esenciales para el desarrollo de un curso o programa efectivo, es en su esencia un desarrollo programático que puede ayudar a concretar objetivos digitales en el que se establece un enfoque centrado en el alumno.

Sus fases consisten en:

Análisis: De acuerdo con el modelo educativo del TECNM (2015) para la educación a distancia, “se debe analizar los contenidos programáticos de las asignaturas, las competencias y su estructura en el plan de estudios, así como las características de los estudiantes, para detectar las necesidades didácticas específicas y posteriormente diseñar un plan en la guía didáctica para satisfacerlas de la mejor manera”.

Diseño: La fase de diseño utiliza como insumo la información que se genera en la fase de análisis, de tal forma que a partir de la revisión de los contenidos programáticos y de su clasificación y dosificación, así como del análisis de las características de los estudiantes de la modalidad educativa a distancia y las competencias profesionales que deben adquirir, el docente especialista en la asignatura apoyado por el diseñador instruccional, define las estrategias que lleven al logro de las competencias que se establecen en el programa de estudios correspondiente.

Se diseñan entonces, las estrategias de enseñanza y de aprendizaje, así como las de evaluación que permitan aún a la distancia, conocer el nivel del logro de estas.

Se diseñan también los instrumentos, a través de los cuales se van a evaluar las evidencias que el estudiante debe entregar como resultado de las actividades de aprendizaje. El producto generado en la fase de diseño son **la guía/instrumentación didáctica**.

En conclusión: Esta etapa determina los objetivos, las herramientas que se utilizarán para el traspaso de contenidos, centrándose en los objetivos de aprendizaje, contenidos, análisis de contenido, los ejercicios prácticos, **la planificación de clases**, instrumentos de evaluación que se utilizarán y selección de medios tecnológicos para apoyar el aprendizaje.

Desarrollo: La fase de desarrollo comienza la producción y el ensayo de la metodología que se utiliza en el proyecto. En esta fase, los diseñadores hacen uso de los datos recogidos de las dos etapas anteriores, y utilizan esta información para crear un programa que va a retransmitir lo que debe ser enseñado a los participantes. Esta fase incluye tres tareas: la elaboración, producción y evaluación. Por tanto, el desarrollo implica la creación y comprobación de los resultados del aprendizaje.

En otras palabras, en esta fase se elaboran los recursos digitales planeados en la fase de diseño, la metodología del TECNM establece que pueden ser: videos, presentaciones electrónicas, actividades e instrumentos de evaluación, mapas mentales o conceptuales, podcast, objetos de aprendizaje, ejercicios y animaciones, entre otros, de los diferentes temas que conforman la asignatura. El material desarrollado debe ser atractivo e impactante, para mantener motivado al estudiante y debe fortalecer el interés por conocer más de la asignatura, logrando propiciar el autoaprendizaje y el aprendizaje guiado por el docente a través de entornos virtuales o complementarios.

Implementación: Implica que el desarrollador y diseñador instruccional deben rediseñar, actualizar y editar el curso con el fin de asegurar el traspaso de conocimiento esperados en los objetivos previos. Para ello, todos los materiales, producto de la fase de desarrollo **se implementa en la plataforma educativa**, y se establece el ambiente de aprendizaje adecuado para alcanzar las competencias definidas en cada una de las asignaturas, es decir, poner en marcha el diseño instruccional de forma eficiente y efectiva en los medios seleccionados para su difusión.

Evaluación: Es la última fase del método ADDIE y es en la que el proyecto está siendo sometido a pruebas finales. Esta fase se puede dividir en dos partes: formativa y sumativa. La fase de formación ocurre mientras los estudiantes y los identificadores están llevando

a cabo el estudio, mientras que la porción sumativa se produce al final del programa. La evaluación formativa al inicio será llevada a cabo por instrumentos para evaluar el diseño de cursos en línea y puede ser realizado por un par académico. La evaluación formativa durante, será aplicada al estudiante mediante cuestionarios cerrado para evaluar los contenidos previos principalmente, y sólo tendrá un puntaje mínimo, ya que de lo contrario el estudiante podría omitir realizarlos. Y la evaluación sumativa se realizará al final de la unidad para evaluar los aprendizajes de los estudiantes de las distintas evidencias que presente.

El modelo ADDIE se complementará con el estándar 366 de CONOCER para evaluar el curso propuesto en la modalidad B-Learning que se especifica en los siguientes temas, y se abordarán a detalle en la propuesta del capítulo 4.

2.4 Estándar 366 de CONOCER

El estándar 366 de CONOCER (Consejo Nacional de Normalización y Certificación de Competencias Laborales), es un estándar para el desarrollo de cursos de formación en línea, el cual proporciona herramientas para planificar un curso en dicha modalidad, elaboración de contenidos y verificación del funcionamiento de éste, mismos que se desarrollan a continuación en 3 elementos.

Elemento 1 de 3. Planificar el desarrollo del curso de formación en línea. Los productos que se obtienen son (tomado de (CONOCER, 2013)):

- ❑ El cronograma para el desarrollo del curso en línea elaborado:
 - Contiene el título del curso,
 - Describe el objetivo general del curso,
 - Especifica la fecha de elaboración en formato día, mes y año,
 - Especifica un número consecutivo para cada actividad a realizar durante el desarrollo del curso,
 - Incluye actividades que contemplan la elaboración de la estructura temática del curso,
 - Incluye actividades que contemplan el desarrollo de la información general del curso,

- Incluye actividades que contemplan la elaboración de guía de actividades de aprendizaje del curso,
 - Incluye actividades que contemplan el desarrollo de los materiales del curso,
 - Incluye actividades que contemplan el desarrollo de los instrumentos de evaluación del curso,
 - Establece el tiempo para desarrollar cada una de las actividades,
 - Incluye nombre y firma de quien elabora el cronograma,
 - Incluye nombre y firma de quien revisa, verifica y autoriza el cronograma, y
 - Está en formato impreso, digital o ambos.
- El documento de información general del curso en línea:
- Contiene título del curso.
 - Contiene objetivo general del curso,
 - Contiene el temario del curso,
 - Contiene los objetivos particulares del curso,
 - Contiene la introducción al curso,
 - Contiene la guía visual,
 - Describe la metodología de trabajo,
 - Establece el perfil de ingreso para participar en el curso,
 - Indica los requisitos tecnológicos y de materiales para participar en el curso,
 - Establece la forma de evaluación del curso,
 - Especifica la duración del curso en horas y semanas, y
 - Está elaborado en formato impreso, digital o ambos.

Elemento 2 de 3. Elaborar los contenidos del curso de formación en línea. Los productos que se obtienen son:

- La guía de actividades de aprendizaje de cada unidad del curso de formación en línea diseñada:
- Especifica el nombre de la unidad de aprendizaje,

- Incluye el objetivo específico de la unidad de aprendizaje,
- Contiene la descripción de las actividades de aprendizaje, indicando el título de la actividad, instrucciones, materiales o recursos,
- Indica la forma de participación individual o colaborativa a través de las herramientas de colaboración y de comunicación,
- Especifica el medio de entrega de cada actividad de aprendizaje,
- Indica el periodo de realización para las actividades,
- Establece la ponderación de calificación de las actividades de aprendizaje,
- Indica los criterios de evaluación de las actividades, y
- Esta generada en formato digital.

☐ El calendario general de actividades establecido:

- Contiene el nombre de las unidades,
- Contiene el nombre de las actividades de cada unidad,
- Establece la ponderación de las actividades de cada unidad,
- Indica las fechas de programación de cada unidad,
- Especifica el periodo de realización de cada actividad, y
- Está generado en formato digital.

☐ El documento de texto elaborado:

- Corresponde con los temas determinados en la guía de actividades de aprendizaje,
- Es coherente con los objetivos establecidos en la guía de actividades de aprendizaje,
- Incluye los fundamentos para el desarrollo de las actividades determinadas en la guía de actividades de aprendizaje,
- Contiene Título,
- Contiene el desarrollo del tema,
- Contiene Referencias bibliográficas,
- Se presenta sin errores ortográficos, y
- Está generado en formato digital.

- ❑ La presentación electrónica elaborada:
 - Corresponde con los temas determinados en la guía de actividades de aprendizaje,
 - Es coherente con los objetivos establecidos en la guía de actividades de aprendizaje,
 - Incluye los fundamentos para el desarrollo de las actividades determinadas en la guía de actividades de aprendizaje,
 - Contiene Título,
 - Contiene el desarrollo del tema,
 - Contiene uno de los siguientes elementos: imágenes, videos o audios,
 - Contiene Referencias bibliográficas,
 - Se presenta sin errores ortográficos, y
 - Está generado en formato digital.

- ❑ El material multimedia elaborado:
 - Corresponde con los temas determinados en la guía de actividades de aprendizaje,
 - Es coherente con los objetivos establecidos en la guía de actividades de aprendizaje,
 - Incluye los fundamentos para el desarrollo de las actividades determinadas en la guía de actividades de aprendizaje,
 - Contiene Título,
 - Contiene el desarrollo del tema,
 - Contiene uno de los siguientes elementos: imágenes, videos o audios,
 - Contiene Referencias bibliográficas,
 - Se presenta sin errores ortográficos, y
 - Está generado en formato digital.

- ❑ El instrumento de evaluación del aprendizaje elaborado:
 - Contiene el nombre de la actividad de aprendizaje a evaluar,

- Contiene instrucciones específicas para el desarrollo de la actividad a evaluar,
- Refiere el tiempo máximo para su realización,
- Contiene los reactivos del instrumento de evaluación del aprendizaje,
- Incluye la ponderación de cada reactivo del instrumento, y
- Está generado en formato digital.

Elemento 3 de 3. Verificar el funcionamiento del curso en la plataforma educativa. El producto es:

- ☐ El reporte para la revisión del funcionamiento del curso de formación en línea elaborado:
 - Incluye nombre del curso,
 - Incluye nombre del desarrollador,
 - Contiene fecha de revisión del curso,
 - Incluye observaciones de diseño,
 - Contiene la unidad o tema donde se presentó la observación,
 - Contiene la **propuesta de modificación**,
 - Incluye observaciones del contenido, e
 - Incluye observaciones de la funcionalidad en la plataforma.

El modelo ADDIE y el estándar 366 de CONOCER se complementarán en este trabajo para desarrollar un curso en línea más completo y con ello cumplir con lo que solicita TECNM para el diseño de los cursos a distancia, el cual se desarrolla en el capítulo 4.

2.5 Teorías del aprendizaje

La psicología educativa según Woolfolk (2014, pág. 10) es una disciplina que estudia los procesos de enseñanza y aprendizaje; aplica los métodos y las teorías de la psicología para explicar y predecir la forma en que aprenden los seres humanos, entre ellas se mencionan algunas de las más importantes a continuación.

2.5.1 El sistema del aprendizaje.

Pozo (2013, p.177) considera que todo aprendizaje sea implícito o explícito, espontáneo o inducido a través de la instrucción, puede analizarse a través de 3 componentes básicos (Véase figura 16):

1. Los resultados del aprendizaje, que consiste en lo que aprende o lo que cambia como consecuencia del aprendizaje.
2. Los procesos de aprendizaje, o cómo se producen esos cambios, mediante qué mecanismos cognitivos.
3. Las condiciones del aprendizaje, o el tipo de práctica que tiene lugar para poner en marcha esos procesos de aprendizaje.

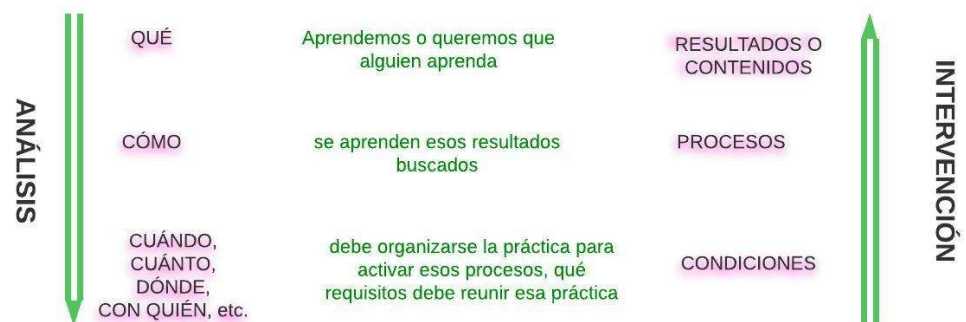


Figura 16. Componentes del aprendizaje (Pozo, 2013)

De acuerdo con Pozo (2018, p. 196) se tienen los siguientes resultados/relaciones de aprendizaje (véase figura 17).

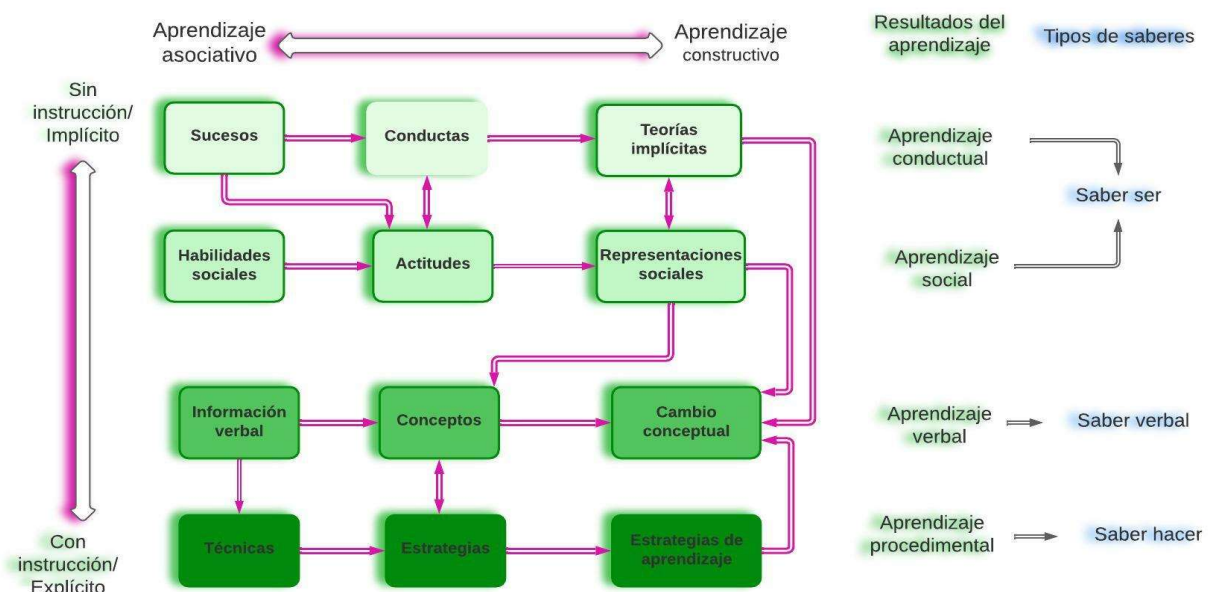


Figura 17. Resultados/relaciones del aprendizaje (Pozo, 2013)

Pozo (2013) identifica 3 procesos de aprendizaje constructivo (crecimiento, ajuste y reestructuración) que implican niveles crecientes de complejidad en la reorganización de los aprendizajes anteriores. En el aprendizaje verbal se dan los siguientes procesos:

- ❑ Información verbal → adquirida por crecimiento.
- ❑ Conceptos → por ajuste.
- ❑ Cambio conceptual → por reestructuración.

Los cuales da cuenta de lo que aprendemos por medio de sistemas simbólicos de representación, aprender a decirlo y a comprenderlo, pero es necesario otro tipo de aprendizaje, que es el saber hacer, y de acuerdo con Pozo (2013), el aprendizaje procedimental que implica adquirir habilidades, destrezas, planes de acción, etc., ya sean de naturaleza esencialmente motora o de carácter cognitivo. Los cuales se encuentran entre las técnicas (también llamadas destrezas, habilidades, hábitos, etc.) que consisten en rutinas de acción automatizadas y las estrategias (tácticas, planes, etc.) que son para actividades más complejas y que implican un uso deliberado y planificado de procedimientos para obtener determinadas metas, pero teniendo como conocimiento previo la teoría del aprendizaje verbal, en donde complementado con el aprendizaje procedimental se espera que haya un cambio conceptual.

En los distintos resultados de aprendizaje, Pozo (2013), menciona que la función profesional de los maestros se ha ido multiplicando y diversificando, por lo que hoy en día hay muchos tipos de ellos trabajando en situaciones muy diferentes, por lo que ejercen numerosas tareas diferentes, asumiendo varios personajes en un complicado ejercicio de multiplicación profesional, tales como los siguientes:

- a. Del maestro proveedor, que proporciona materiales e instrucciones. Es el maestro que tiene las respuestas que el estudiante necesita.
- b. Del maestro modelo, que ilustra modos de comportamiento, actitudes o destrezas motoras, a través de su propio comportamiento, actitudes, o destrezas. Es el espejo en el que miran los estudiantes para saber que tienen que hacer. Es más implícito que explícito.
- c. Del maestro entrenador, que fija con detalle lo que deben de hacer los estudiantes, cuándo, cómo y cuánto, como un médico con sus pacientes. Fija el tratamiento, y el estudiante se debe limitar a cumplirlo tal cual. Es complementario al del proveedor. Se puede proveer información sin entrenar, pero no viceversa.

- d. Del maestro tutor o guía, que deja que los estudiantes asuman parte de la responsabilidad de su aprendizaje, pero una vez que les ha fijado bien las metas y los medios para lograrlo. El tutor participa en la definición de metas y los medios para el aprendizaje, pero deja que sean los estudiantes quienes organicen su propia práctica, que él supervisa y regula.
- e. Del maestro asesor o director de investigación, que deja que sea los estudiantes los que fijen sus propios objetivos concretos y diseñen su propio aprendizaje.

Estas múltiples profesiones del docente se pueden relacionar como se aprecia en la siguiente tabla (véase figura 18):

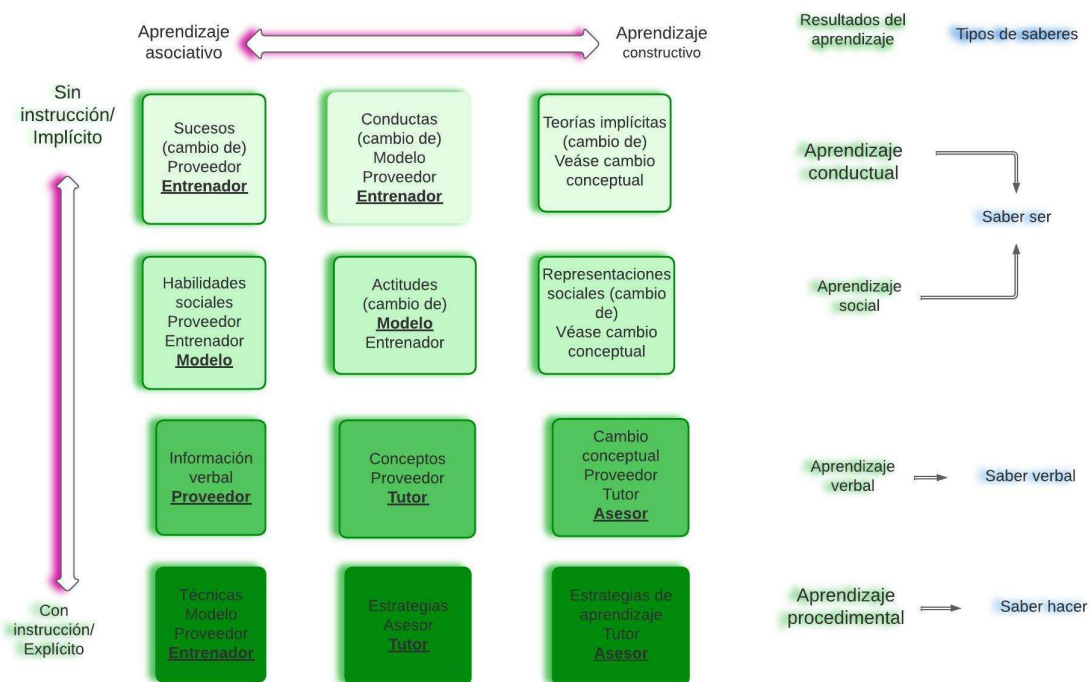


Figura 18. Relación de resultados de aprendizaje y papeles distintos del maestro. En negrita está el actor principal en cada caso, mientras que los restantes corresponden a personajes secundarios, pero no por ello menos necesarios (Pozo, 2013)

2.5.2 Conductista (Skinner)

Marín (2011), citando a Skinner (1969) partió de la creencia de que los principios del condicionamiento clásico explican sólo una pequeña fracción del comportamiento aprendido. Muchas conductas humanas son operantes, no respondientes. El

condicionamiento clásico únicamente describe la forma en que las conductas existentes podrían asociarse con nuevos estímulos; no explica cómo se adquieren nuevas conductas operantes. A continuación, algunas definiciones que se contemplan en esta teoría:

Operantes. Conductas voluntarias (y por lo general dirigidas hacia metas) que realiza un ser humano o un animal.

Condicionamiento operante. Aprendizaje en que el comportamiento se fortalece o se debilita por sus consecuencias o antecedentes.

Desde esta perspectiva conductual el rol activo recae sobre la figura del maestro. Así, su función es contribuir a reforzar, moldear, generalizar, discriminar, y extinguir ciertas conductas durante la situación de clases. El estudiante es pasivo y reproductor de conocimientos.

Aplicado al contexto escolar sería en el reforzamiento paulatino dependiendo de las respuestas correctas dada por el estudiante, en una secuencia de tareas o actividades previas. En la enseñanza programada, el aprendizaje se organiza en secuencias de unidades dosificada en tareas o actividades, que responden a objetivos de un curso o programa, los cuales se espera que el estudiante alcance paulatinamente (Marcos Marín, 2011).

El resultado del aprendizaje se evalúa de acuerdo con las respuestas correctas o incorrectas y se estimula mediante reconocimiento o refuerzo.

Las aplicaciones del condicionamiento clásico para el aprendizaje pueden ser los siguientes:

- ☐ Asocie hechos positivos y agradables con tareas de aprendizaje.
- ☐ Ayude a los alumnos a arriesgarse de manera voluntaria y exitosa en situaciones que producen ansiedad.
- ☐ Ayude a que los alumnos reconozcan las diferencias y similitudes entre situaciones, de manera que sean capaces de discriminar y generalizar adecuadamente.

2.5.3 Aprendizaje significativo.

Según Pozo (2013, p.305), la teoría del aprendizaje significativo propuesta por Ausubel (1976), establece que se puede asimilar un conocimiento siempre que existan las condiciones como:

- a) Que el material sea potencialmente significativo, y
- b) El alumno debe tener una predisposición al aprendizaje significativo y que contenga conceptos inclusores con los que pueda relacionarse el nuevo material.

La figura 19 resume las principales condiciones que deben cumplirse para que se produzca un aprendizaje constructivo de acuerdo con Pozo (2013).

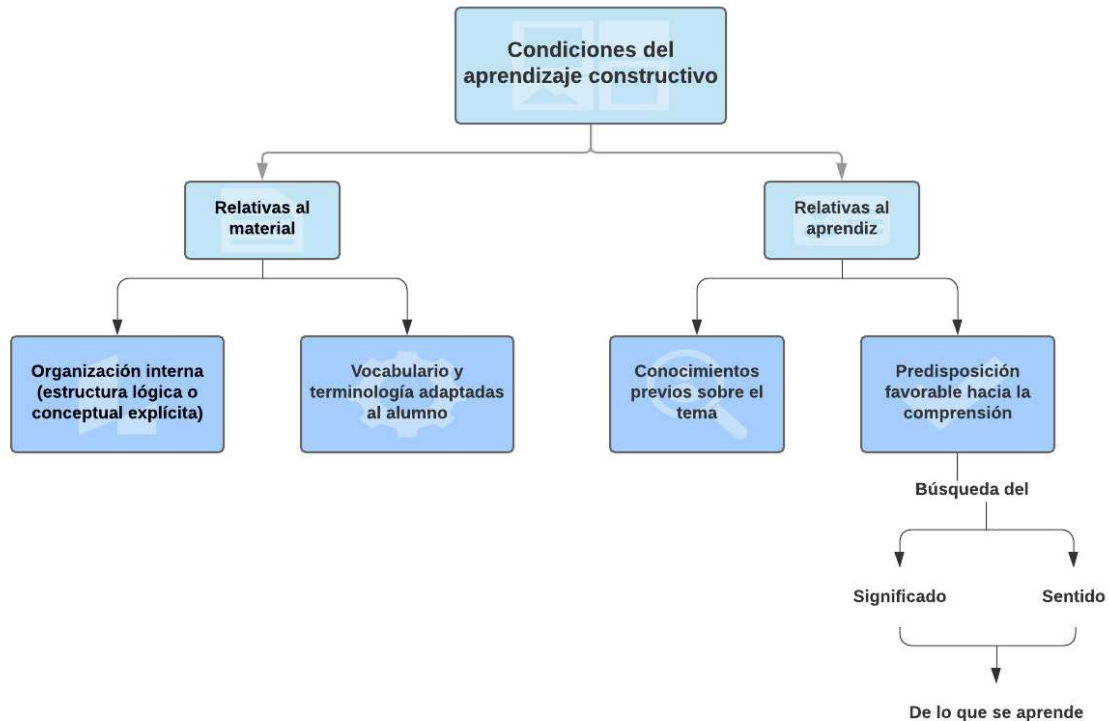


Figura 19. Condiciones o requisitos para que se produzca un aprendizaje constructivo a partir de Ausubel, Novak y Hanesian (1978) (adaptado de Pozo, 2013).

Ausubel (1983) citado por Rodríguez (2011) distingue tres tipos de aprendizajes significativo:

- a) **Aprendizaje de representación.** Consiste en la atribución de significados a determinados símbolos. Ocurre cuando se igualan en significado símbolos arbitrarios con sus referentes (objetos, eventos, conceptos) y significan para el alumno cualquier significado al que sus referentes aludan.
- b) **Aprendizaje de conceptos:** Los conceptos se definen como objetos, eventos, situaciones o propiedades con atributos comunes que se designan mediante un símbolo o signos, partiendo de ello podemos afirmar que en cierta forma también es un aprendizaje

de representaciones. Los conceptos son adquiridos a través de los procesos de formación y de asimilación.

c) **Aprendizaje de proposiciones:** Este tipo de aprendizaje va más allá de la simple asimilación de lo que representan las palabras, aisladas o combinadas, ya que requiere captar el significado de las ideas expresadas en forma de proposiciones. El aprendizaje de proposiciones implica la combinación y relación de varias palabras cada una de las cuales constituye un referente unitario, luego éstas se combinan de tal manera que el concepto resultante es más que la simple suma de significados de las palabras componentes individuales, produciendo un nuevo significado que es incorporado a la estructura cognitiva. O sea, que una proposición potencialmente significativa, expresada oralmente, como una declaración que posee significado denotativo y connotativo de los conceptos implicados, interactúa con los conceptos relevantes ya establecidos en la estructura cognitiva y, de esa interacción, surgen los significados de la nueva proposición.

2.5.4 Aprendizaje por descubrimiento

Bruner (1990), citado en (Marcos, 2011) se adentra en la explicación de cómo los seres humanos construimos nuestros significados y nuestras realidades, sobre la base de la cultura.

Bruner (1990) define el aprendizaje como un proceso de construcción y reconstrucción de categorías o representaciones de la realidad que acontece por medio de la interacción social y sobre la base de las estructuras cognitivas previas del aprendiz. Estas categorías dan significado y organización a la experiencia del sujeto y facilitan su acción.

Según Marcos (2011, p.224), Bruner (1990) describe tres modos básicos de categorización o representación de la realidad que se originan en diferentes momentos del desarrollo evolutivo, pero una vez que se adquieren actúan de modo paralelo. Estos son:

1. La representación **enactiva**, que acontece en los primeros años del desarrollo ontogenético: se refiere a la de la persona. Bruner la relaciona con la fase senso- motora de Piaget en la cual se fusionan la acción con la experiencia externa.
2. La representación **icónica**: ocurre cuando se representan las cosas mediante imágenes o esquemas espaciales independientes de la acción, pero que guardan relación con el objeto de representación.

3. La representación **simbólica**: es la representación de las cosas mediante símbolos arbitrarios, que no guardan necesariamente relación con la cosa representada.

Estos modos de categorización apuntan a dos procesos fundamentales que Bruner denomina “concept formation” y “concept attainment”. El “concept formation” o formación de conceptos, caracteriza básicamente las edades comprendidas entre los 0 y 14 años. Se refiere a la formación de las categorías o estructuras básicas que conformarán el mundo cognitivo de la persona y que sirven de soporte básico para la modificación e integración de nuevas categorías o estructuras del conocimiento. Por su parte, el “concept attainment” caracteriza el aprendizaje de las personas a partir de los 15 años. Supone la identificación de las propiedades y límites de pertenencia a una categoría, a partir de la definición simbólica de los atributos y componentes esenciales de las cosas y la descripción de cómo se integran estos componentes esenciales.

La forma en que el sujeto cognoscente construye su conocimiento acerca del mundo constituye el núcleo del enfoque de la educación postulado por Bruner, el cual se basa en una concepción desarrolladora de la enseñanza, que trasciende el plano de la mera instrucción y del aprendizaje descriptivo. En esta dirección, Bruner (1990) citado por Marín (2011) define cuatro factores esenciales que intervienen en el proceso de aprendizaje. Estos son:

- ❑ La disposición del estudiante para aprender: sus deseos e intereses, asociados a la experiencia y a las características del contexto escolar.
- ❑ La estructura de los conocimientos: el modo en que un conjunto de conocimientos puede organizarse de modo que sea interiorizado lo mejor posible por el estudiante. - Las secuencias más efectivas para presentar un material.
- ❑ El reforzamiento: naturaleza y el esparcimiento de los premios y castigos. Bruner coloca el énfasis en el papel que desempeña la comprensión en el proceso de aprendizaje. Es el entendimiento del significado de la acción, y no el reforzamiento, lo que potencia que el sujeto aprenda. En este caso, la comprensión se concibe como la capacidad de los seres humanos para construir significados, dotar de sentido al mundo social y cultural, identificarse con él y desarrollar un sentido de identidad.

2.5.5 Zona del desarrollo próximo

El concepto básico aportado por Vygotsky (1989), citado por Rodríguez Cárdenas (2018), es el de “zona de desarrollo próximo”. Según él, cada estudiante es capaz de aprender una serie de aspectos que tienen que ver con su nivel de desarrollo, pero existen otros fuera de su alcance que pueden ser asimilados con la ayuda de un adulto o de iguales más aventajados. Este tramo entre lo que el estudiante no puede aprender por sí mismo y lo que puede aprender con ayuda es lo que denomina zona de desarrollo próximo, y es donde el docente tiene lugar. En este sentido la teoría de Vygotsky concede al docente un papel esencial al considerarle facilitador del desarrollo de estructuras mentales en el estudiante para que sea capaz de construir aprendizajes más complejos (también denominado andamiajes que sugiere Bruner) (Rodríguez Cárdenas, 2018).

Vygotsky (1989), citado por Rodríguez (2018) propone también la idea de la doble formación, al defender que toda función cognitiva aparece primero en el plano interpersonal y posteriormente se reconstruye en el plano intrapersonal. Es decir, se aprende en interacción con los demás y se produce el desarrollo cuando internamente se controla el proceso, integrando las nuevas competencias a la Zona del desarrollo próximo (ZDP).

Según Rodríguez (2018, p.43), la mayor aplicabilidad en el campo educativo es la ZDP, pues se espera que los docentes tomen en cuenta el desarrollo del estudiante en sus dos niveles: el real y el potencial, para promover el avance y la autorregulación mediante actividades de colaboración.

Características que se podrían tener en cuenta en la escuela para fortalecer la ZDP:

- ☐ Establecer un nivel de dificultad: este nivel, que se supone es el nivel próximo, debe ser algo desafiante para el estudiante, pero no demasiado difícil.
- ☐ Proporcionar desempeño con ayuda: el adulto proporciona práctica guiada al estudiante con un claro sentido del objetivo o resultado de su desempeño.
- ☐ Evaluar el desempeño independiente: el resultado más lógico de una ZDP es que el estudiante se desempeñe de manera independiente.
- ☐ De acuerdo con Vygotsky, el aprendizaje precede al desarrollo, pues entre el aprendizaje y el desarrollo existe una relación de tipo dialéctica, una enseñanza adecuada contribuye a crear ZDP.

En conclusión, para Vygotsky (1989), citado por Rodríguez (2018) el contexto sociocultural de donde proviene el estudiante y en el que transcurre su vida dentro y fuera de la escuela,

las interacciones verbales y no verbales, el entrelazamiento de los sistemas que condicionan la validez ecológica del quehacer educativo, los materiales utilizados para enseñar y los instrumentos empleados para evaluar el aprendizaje se convierten en objetos legítimos para el quehacer pedagógico que deben ser tenidos en cuenta a la hora de educar.

2.6 Aprendizaje basado en problemas (ABP).

El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP o PBL por sus siglas en inglés) es una estrategia instruccional centrada en el aprendizaje, la investigación y la reflexión que se caracteriza por la solución de un problema “real”, previsto por el profesor. Los estudiantes deben hacer uso del pensamiento crítico y de habilidades para resolver problemas trabajando colaborativamente en pequeños grupos (Campos Arenas, 2017). Para lograr todo ello deben hacer uso de los conocimientos previos.

Elementos del ABP formativo, de acuerdo con (Moust, Bouhuijs, & Schmidt, 2007):

- a) Un problema, que requiera un estudio exhaustivo.
- b) Conocimientos previos, activados gracias al proceso que conlleva pensar en el problema.
- c) Preguntas que surgen del problema y la necesidad o motivación de buscar una solución a partir de otras fuentes.

En la siguiente tabla (ver Tabla 6) se muestran las diferencias de los elementos del aprendizaje convencional y el aprendizaje basado en problemas (Escribano González & del Valle, 2010).

Tabla 6. Diferencias entre aprendizaje convencional y aprendizaje basado en problemas.

Elementos del aprendizaje	Aprendizaje convencional	Aprendizaje ABP
Ambiente de aprendizaje y los materiales de enseñanza.	Es preparado y presentado por el profesor.	La situación de aprendizaje es presentada por el profesor y el material de aprendizaje es

		seleccionado y generado por los alumnos.
Secuencia en el orden de las acciones para aprender.	Determinadas por el profesor.	Los alumnos participan activamente en la generación de esta secuencia.
Momento en el que se trabaja en los problemas y ejercicios.	Después de presentar el material de enseñanza.	Antes de presentar el material que se ha de aprender.
Responsabilidad de aprendizaje.	Asumida por el profesor.	Los alumnos asumen un papel activo en la responsabilidad de su aprendizaje.
Rol del docente	El profesor representa al experto .	El profesor es un tutor sin un papel directivo, es parte del grupo de aprendizaje.
Evaluación.	Determinada y ejecutada por el profesor.	El alumno juega un papel activo en su evaluación y la de su grupo de trabajo.

Fuente: Elaboración propia.

El aprendizaje basado en problemas puede utilizarse en el aprendizaje procedimental que recomienda Pozo (2013, capítulo 12, pp. 485) en el nivel de estrategias, ya que se sugiere que el docente actúe como un tutor/ asesor, en donde el estudiante se enfrente a situaciones cada vez más complejas y abiertas para que asuma decisiones en base a los conocimientos adquiridos.

Capítulo 3. Marco teórico disciplinar

En este capítulo se contemplan las lecturas previas del nivel medio superior sobre vectores en el plano y ecuación de la recta, los cuales son requeridos para comprender mejor a los nuevos contenidos sobre vectores en el espacio, ecuación de la recta y ecuación del plano, temas de la asignatura de Cálculo Vectorial de la unidad 1, del plan de estudios de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales.

3.1 Introducción analítica a las geometrías (vector en el plano)

La geometría griega

En siglo III a.C, Euclides de Alejandría, en sus **Elementos**, ordeno y escribió sobre los elementos de la Geometría (Bracho, 2021), imprimiendo el sello lógico que lo distingue de las matemáticas.

Lo que hoy se conoce como geometría euclidiana, y hasta hace dos siglos como geometría, está basada en los cinco postulados de Euclides:

- I. Por cualesquiera dos puntos, se puede trazar el segmento de recta que los une.
- II. Dados un punto y una distancia, se puede trazar el círculo con centro en el punto y cuyo radio es la distancia.
- III. Un segmento de recta se puede extender en ambas direcciones indefinidamente.
- IV. Todos los ángulos rectos son iguales.
- V. Dadas dos rectas y una tercera que las corta, si los ángulos internos de algún lado suman menos de dos ángulos rectos, entonces las dos rectas se cortan y lo hacen de ese lado.

En estos postulados se describe el comportamiento y la relación entre ciertos elementos básicos de la geometría, como son “punto”, “trazar”, “segmento”, “distancia”, etc.

Geometría analítica de René Descartes (1596-1650).

Descartes en su quinto postulado de la Géométrie, introduce el álgebra a la solución de problemas de índole geométrico, el cual establece:

V.a (El Quinto) Dada una línea recta y un punto fuera de ella, existe una única recta que pasa por el punto y que es paralela a la línea.

Descartes introdujo el producto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, los ejes coordenados x, y ; a cada pareja de números (x, y) le corresponde un punto $p \in \mathbb{R}^2$, $p = (x, y)$. Además, se le puede

hacer corresponder la flecha (segmento (la recta dirigido llamado vector)) que “nace” en el origen y termina en el punto. Véase figura 20.

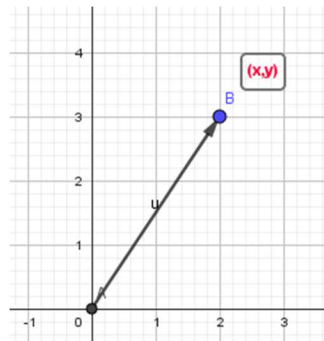


Figura 20. Vector en el plano

Escalares y vectores

En física, las cantidades se clasifican en escalares y vectoriales; una cantidad no puede ser escalar y vectorial al mismo tiempo (Rojas, 2021).

Un escalar es una cantidad que queda por completo especificada por medio de un número (magnitud) que tiene unidades apropiadas. Por ejemplo: la masa (5 libras), la densidad (1,2 g/cm³), el volumen (4 cm³), el área (2,5 m²) y los intervalos de tiempo (3 s). Véase figura 21.

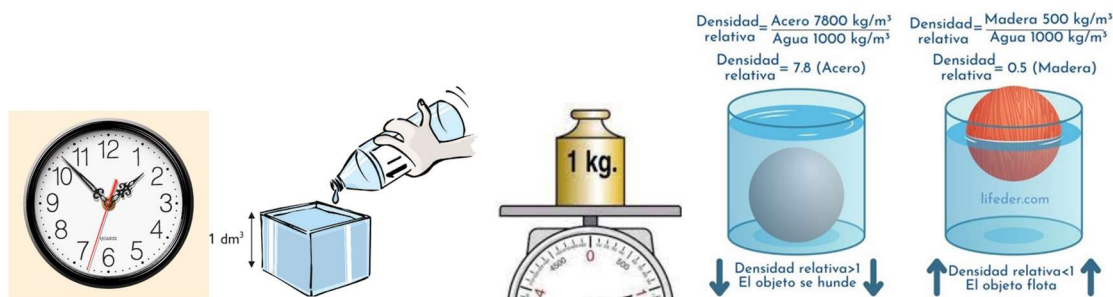


Figura 21. Cantidades escalares

Un vector es una cantidad física que queda especificada por su magnitud y su dirección. Ejemplos: El desplazamiento, la velocidad, la fuerza y la aceleración son ejemplos de cantidades vectoriales. Véase figura 22.



Figura 22. Cantidades vectoriales

Definición de vector

Un vector es una cantidad que posee módulo, dirección, sentido y punto de aplicación. Segmento de recta, que posee un punto inicial y otro final (el cual se indica con una flecha).

La longitud del segmento representa el **módulo** del vector, y su dirección y sentido pueden ser determinados tanto matemáticamente como geométricamente, en función de su localización en el espacio o en el plano. Véase figura 23.

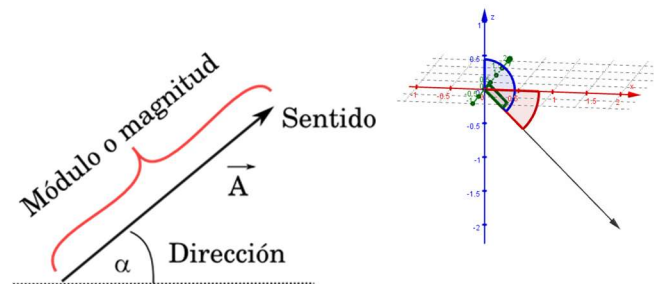


Figura 23. Vectores en el plano y en el espacio

Partes de un vector

- ☐ Origen. Punto desde donde parte el vector.
- ☐ Extremo. Punto donde culmina el vector.
- ☐ Módulo. Es la medida del segmento representado por el vector. Por ser una medida, siempre es una magnitud positiva.

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ó} \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- ☐ Dirección. La de la recta en que se encuentra y sus paralelas.
- ☐ Sentido: El que indica la punta de la flecha.

Representación cartesiana ortogonal.

La representación de vectores en el plano se realiza utilizando ejes cartesianos. La misma es una flecha que une el origen de coordenadas con el punto (x_p, y_p) . La primera componente es x (**abscisa**) y la segunda es y (**ordenada**). Véase figura 24.

Representación:

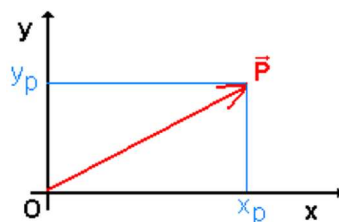


Figura 24. Representación de vectores en el plano

Expresión: $\vec{P} = (x_p, y_p)$.

Ejemplo 1:

La representación del vector $A = (-1, 5)$ es un segmento orientado que une el origen de coordenadas $(0,0)$, con el punto $(-1,5)$, el cual es el extremo. Véase figura 25

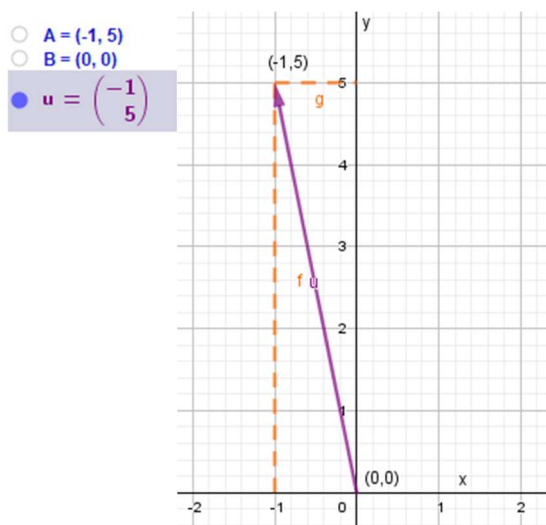
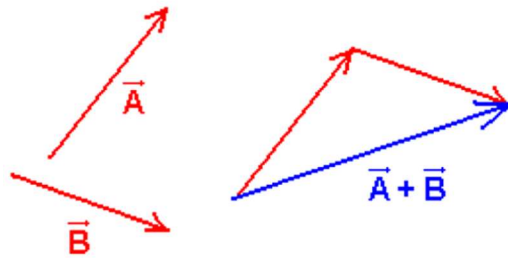


Figura 25. Representación del ejemplo 1 en GeoGebra

Suma. Forma gráfica

- ❑ Ubicamos el vector $\vec{B}$ de forma tal que su origen coincida con el extremo del vector $\vec{A}$. El vector resultante es el determinado desde el origen del vector $\vec{A}$ hasta el extremo del vector $\vec{B}$. Ejemplo:



- A. ¿Cuáles son las coordenadas del vector A y del vector B? Véase figura 26.
 B. ¿Cuánto es la suma de A+B?

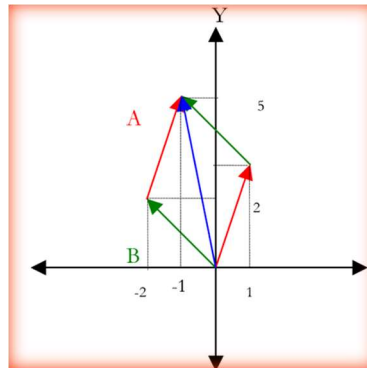


Figura 26. Suma de vectores

Solución:

- A. Vector $A = (1,3)$, vector $B = (-2,2)$.
 B. $A + B = (-1,5)$

Suma. Forma analítica.

La forma analítica de la suma de vectores es sumar componente a componente.

$$\vec{A} = (x_1, y_1)$$

$$\vec{B} = (x_2, y_2)$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

En el ejemplo anterior:

$$\vec{A} = (1,3)$$

$$\vec{B} = (-2,2)$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (1 + (-2), 3 + 2) = (-1,5)$$

Resta.

Definición. Para restar dos vectores, con el mismo origen, se suma al primero el opuesto del segundo: $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

El opuesto de $\vec{A} = (a_1, a_2)$ es el vector $-\vec{A} = -(a_1, a_2) = (-a_1, -a_2)$

Ejemplo 2:

Dados los vectores: $\vec{A} = (4,8)$ y $\vec{B} = (2,3)$; Resuelve (Véase figura 27):

$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = (4,8) + [-(2,3)]$ **Reemplazamos los valores de los vectores**

$= (4,8) + (-2, -3)$ **Hallamos el opuesto del vector B.**

$= (4 + (-2), 8 + (-3))$ **Sumamos los vectores, componente a componente**

$= (2, 5)$

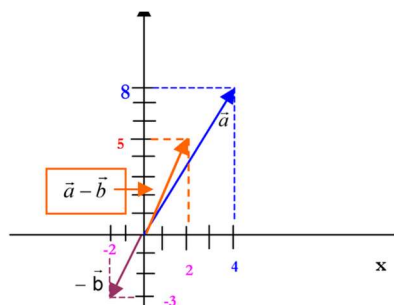


Figura 27. Resta de vectores

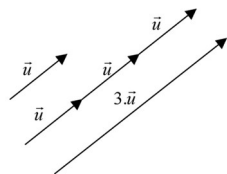
Multiplicación

Multiplicación de un vector por un escalar. Trabajando con vectores es usual llamar "escalar" a los números que no forman parte de los componentes de los vectores.

Escalar Natural: Se llama producto de un vector $\vec{u}$ por un escalar natural n a la suma de n vectores iguales a $\vec{u}$.

$$\vec{u} \cdot n = \underbrace{\vec{u} + \vec{u} + \dots + \vec{u}}_{n \text{ veces}}$$

Gráficamente $\vec{u} \cdot 3 = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$



Analíticamente:

Si $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{u} \cdot n = (x, y) \cdot n = (n \cdot x, n \cdot y)$.

Ejemplo: Sea $\vec{u} = (1, 3)$, obtener $3 \cdot \vec{u}$. Vase figura 28.

$$3 \cdot (1, 3) = (3, 9)$$

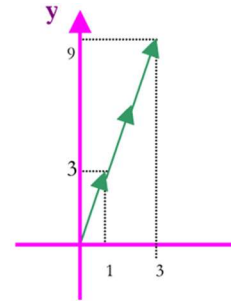


Figura 28. Multiplicación por un escalar

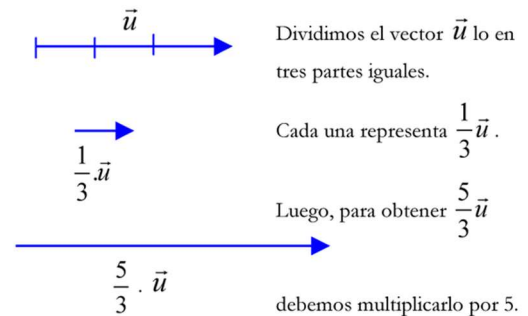
Multiplicación. Escalar racional.

Se llama producto de un vector $\vec{u}$ por el número racional $\frac{m}{n}$ a otro vector $\vec{v}$ tal que, el producto de $\vec{v}$ por $\frac{n}{m}$ sea igual al vector $\vec{u}$.

$$\frac{m}{n} \cdot \vec{u} = \vec{v} \quad \left(\frac{n}{m} \cdot \vec{v} \right)$$

Ejemplo: $\frac{5}{3} \cdot \vec{u} = 5 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \vec{u} \right)$

Primero se halla $\frac{1}{3} \vec{u}$



Ejercicios

Grafique y resuelva analíticamente los ejercicios de multiplicación que proporcione el docente.

1. $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (1, -2)$:

a) $3 \cdot \vec{u}$

b) $2 \cdot \vec{v} + 3\vec{u}$

2. Encontrar el valor de k en las siguientes expresiones:

a) $2(5, k) = (10, 14)$

b) $\frac{1}{4}(2, 3k) = \left(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right)$

Grafique y resuelva analíticamente los siguientes productos:

3. Obtener los valores de x y de z para las siguientes expresiones:

a) $x(2, z) = (2, 8)$

b) $Z(21, z) = (42, x)$

4. $\frac{3}{2} \cdot (-2, 4)$

5. $-\frac{1}{2} \cdot (8, 6)$

2. Sistema de coordenadas de vectores.

Un vector se describe mediante un par ordenado de números llamados componentes del vector. La primera componente es la horizontal (o abscisa del vector), y la segunda, la vertical (u ordenada del vector). Véase figura 29.

Ejemplo: $\vec{a} = (2,4)$

$\swarrow$
 $\searrow$

Componente vertical, ordenada

Componente horizontal, abscisa

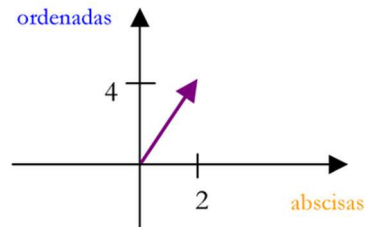


Figura 29. Sistema de coordenadas

¿Cómo hallar las componentes de un vector cuando se conocen las coordenadas de su origen y su extremo?

Las componentes del vector $\overrightarrow{ab}$ se calcula restando a las coordenadas del extremo, las coordenadas del origen.

Véase figura 30.

Dados $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$ tenemos:

$$\overrightarrow{ab} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

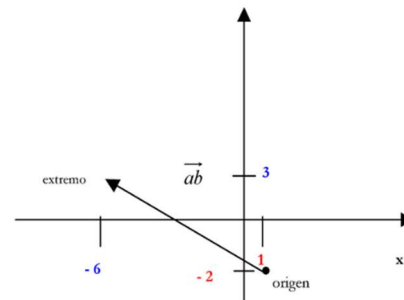


Figura 30. Componentes de un vector

Del ejemplo tenemos (véase figura 31): $A = (1, -2)$ y $B = (-6, 3)$ entonces:

$\overrightarrow{AB} = (-6 - 1, 3 - (-2)) = (-6 - 1, 3 + 2) = (-7, 5)$ y $\overrightarrow{AB}$ se denomina **vector director o de dirección**.

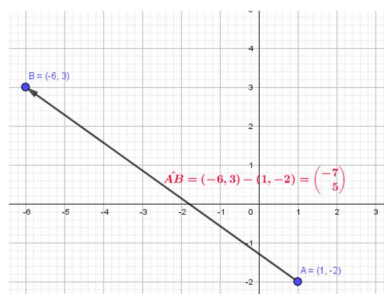


Figura 31. Vector director AB

Teniendo el vector director $\overrightarrow{AB} = (-7, 5)$ se puede calcular el ángulo con $\tan \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta =$

$$\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right), \theta = \tan^{-1} \left(\frac{5}{-7} \right) \Rightarrow \theta \approx 144.46^\circ$$

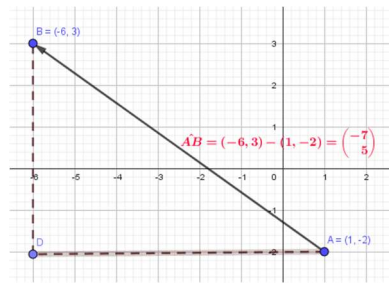


Figura 32. Representación de la solución en GeoGebra

Nota: En el siguiente link puede comprobar la respuesta:

<https://www.geogebra.org/m/xv9vbc9p>

3. Vectores, Módulo

Módulo o intensidad de un vector (longitud, distancia). Es la longitud del segmento que define el vector.

$$\vec{a} = (a_x, a_y) \text{ es } |\vec{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$$

Para hallar el módulo de un vector se utiliza el Teorema de Pitágoras aplicado a sus componentes. Véase figura 32.

Teorema de Pitágoras.

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2, \text{ despejando } h: h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

Ejemplo 1

Determina el módulo del vector $\vec{a} = (3, 4)$: $|\vec{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow |a| = \sqrt{9 + 16} \Rightarrow |a| = 5$$

Gráficamente: Véase figura 33.

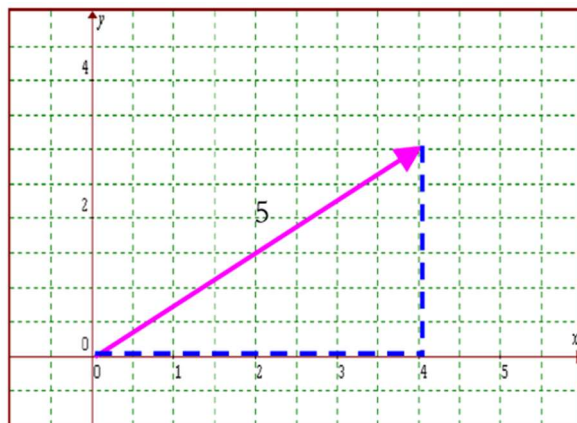


Figura 33. Representación ejemplo 1.

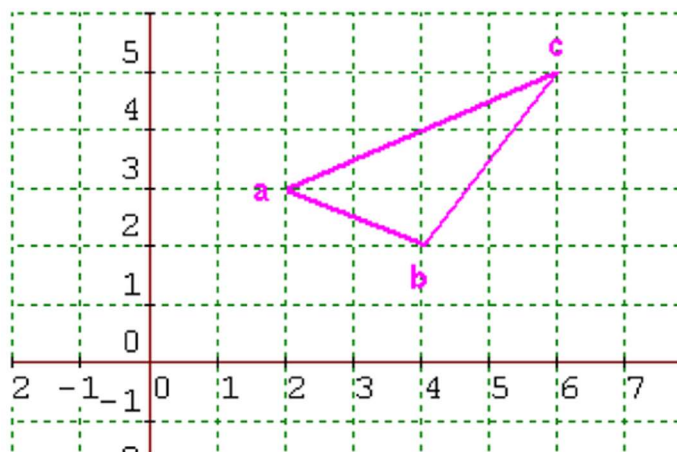
Nota: El mismo método se utiliza para calcular la distancia de dos puntos cualesquiera en el plano.

Ejemplo 2.

Determina el perímetro del triángulo cuyos vértices son $a = (2,3)$, $b = (4,1)$ y $c = (6,5)$.

Solución:

Paso 1: Graficamos el triángulo:



Paso 2: Determinamos el módulo de los vectores $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{bc}$ y $\overrightarrow{ca}$: $a = (2,3)$, $b = (4,1)$ y $c = (6,5)$

$$\overrightarrow{ab} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \Rightarrow \overrightarrow{ab} = \sqrt{(4 - 2)^2 + (2 - 3)^2}$$

$$\overrightarrow{ab} = \sqrt{4 + 1} \Rightarrow \overrightarrow{ab} = \sqrt{5} \approx 2.23$$

$$\overrightarrow{bc} = \sqrt{(6 - 4)^2 + (5 - 2)^2} \Rightarrow \overrightarrow{bc} = \sqrt{4 + 9} \Rightarrow \sqrt{13} \approx 3.6$$

$$\overrightarrow{ca} = \sqrt{(2 - 6)^2 + (3 - 5)^2} \Rightarrow \sqrt{16 + 4} \Rightarrow \sqrt{20} \approx 4.47$$

Paso 3: Calculamos el perímetro del triángulo: $\overrightarrow{ab} = \sqrt{5} \approx 2.23$

$$\overrightarrow{bc} = \sqrt{4 + 9} \Rightarrow \sqrt{13} \approx 3.6, \text{ y } \overrightarrow{ca} = \sqrt{20} \approx 4.47$$

$$P = \vec{ab} + \vec{bc} + \vec{ca}$$

$$P=2.23+3.6+4.47$$

$$P=10.3$$

4. Vectores. Componentes

Usualmente, se usan las componentes (A_x, A_y) del vector en vez de las coordenadas del punto (a, b) .

Sea $\vec{A}$ un vector de posición en un sistema de sistema de coordenadas rectangulares (Véase figura 34). Las componentes rectangulares del vector $\vec{A}$ están dadas por:

$$A_x = |\vec{A}| \cos \theta \text{ y } A_y = |\vec{A}| \sin \theta$$

La magnitud de $\vec{A}$ por: $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$, $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{A_y}{A_x} \right)$

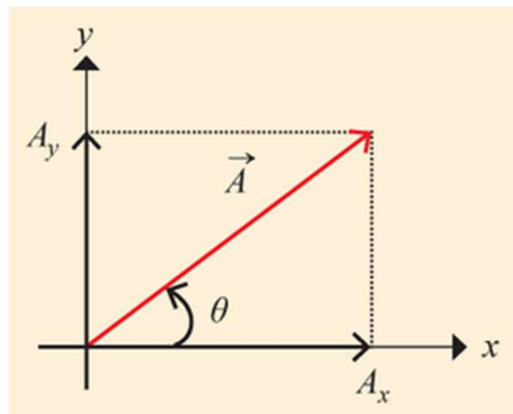


Figura 34. Componentes rectangulares

La siguiente figura muestra los signos de las componentes rectangulares de un vector $\vec{A}$.

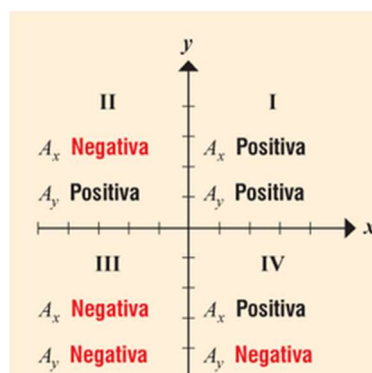


Figura 35. Signos de las componentes rectangulares

Ejemplo 3

Una mujer empuja una podadora de césped. La magnitud de la fuerza con la que empuja es de 10 kgf dirigida un ángulo de 30° con la horizontal (figura 36): a) ¿Cuál es la dirección de la fuerza? b) Calcule las componentes de la fuerza.

Solución:

- a) Dado que la dirección de referencia que usaremos para la dirección de un vector es el ángulo medido a partir del eje +x y gira hacia al eje +y (sentido contrario de las manecillas del reloj), la dirección del vector $\vec{F}$ es $\theta_{\vec{F}} = 360^\circ - 30^\circ = 300^\circ$. La figura de la derecha muestra la gráfica del vector con la escala 1:5.

Nota: el ángulo de 30° es un rumbo sureste.



Figura 36. Representación ejemplo 3

- b) A fin de calcular las componentes de la fuerza, aplicamos las fórmulas de las componentes rectangulares de un vector:

$$F_x = |\vec{F}| \cos \theta = 10 \text{ kgf} \cos 300^\circ = 5 \text{ kgf}$$

$$F_y = |\vec{F}| \sin \theta = 10 \text{ kgf} \sin 300^\circ = -8.66 \text{ kgf}$$

La componente horizontal F_x es la que contribuye al movimiento, mientras que la componente vertical F_y no. El signo negativo indica que apunta hacia el suelo, razón por la cual no contribuye el movimiento de la podadora. La figura siguiente muestra la gráfica de las componentes con la escala 1:5.

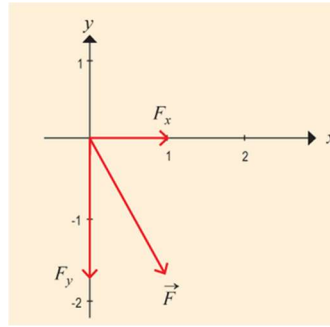


Figura 37. Componentes del ejemplo 3.

El rumbo, en el cual el ángulo siempre es agudo, se mide desde el Norte o el Sur hacia el Este o el Oeste. El rumbo de un vector se especifica indicando primero el punto cardinal (Norte o Sur) desde donde se mide el ángulo. Luego, la medida del ángulo, medido desde el Norte o Sur, hasta el vector. Finalmente, el punto cardinal Este u Oeste hacia donde está el vector (Rojas, 2021).

Ejemplo: N30°E, S60°O, S30°E, etc.

Ejemplo 4

Especifique los rumbos de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ en la figura siguiente:

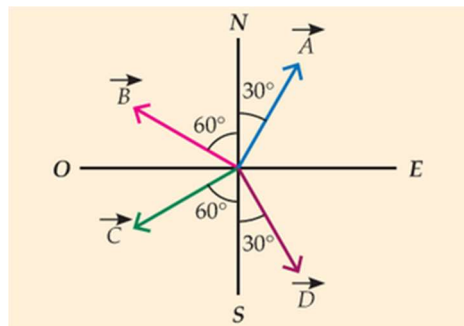


Figura 38. Ejemplo 4

Solución: El rumbo del vector $\vec{A}$ es: N30°E, 30° al noreste, 30° al este del norte o 60° al norte del este.

El rumbo del vector $\vec{B}$ es: N60°O, 60° al noroeste, 60° al oeste del norte o 30° al norte del oeste.

El rumbo del vector $\vec{C}$ es: S60°O, 60° al suroeste, 60° al oeste del sur o 30° al sur del oeste.

El rumbo del vector $\vec{D}$ es: S30°E, 30° al sureste, 30° al este del sur o 60° al sur del este.

Problema 1:

Un cazador desea tener un buen tino para tirar al pájaro (véase figura 39), pero, el cazador sólo conoce los puntos de ubicación de la flor y la copa del árbol, entonces para lograr su objetivo necesita calcular lo siguiente:

- Calcular la distancia entre el árbol y la flor.
- Calcular el ángulo entre el árbol y la flor.

Solución a)

$$\begin{aligned}
 d_{\overline{AB}} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
 d_{\overline{AB}} &= \sqrt{(-5 - 1)^2 + (1 - 5)^2} \\
 &= \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} \approx 7.21 \text{ u} \\
 \overrightarrow{AB} &= (-1 - (-5)), (5 - 1) = (6, 4) \\
 \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{4}{6}\right) \Rightarrow \theta \approx 33.69^\circ
 \end{aligned}$$

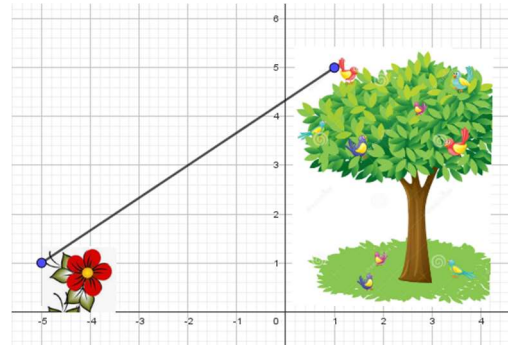


Figura 39. Problema 1

Problema 2:

Dos pequeñas lanchas ayudan a que un barco salga de su embarcadero (véase figura 40). Una de las lanchas está tirando de él con una fuerza de **200 N**, mientras que la otra lo hace con una fuerza de **150 N**.

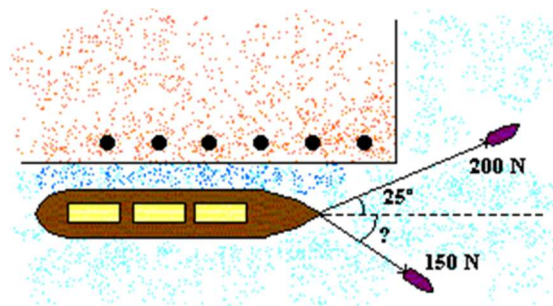


Figura 40. Problema 2

La primera lancha toma una dirección que forma un ángulo de **25°**. ¿Qué dirección debe tomar la otra lancha para que el barco salga paralelamente al espigón?

Preguntas de análisis

- ¿Para qué sirven los vectores en la vida real?
- ¿Dónde puedo utilizar los vectores?
- ¿Qué signos puede tener la componente de un vector? Justifique.
- ¿En el rumbo de un vector puede haber un ángulo obtuso? ¿Por qué?

5. ¿En la dirección de un vector, al tener como referencia del eje +x al eje +y, el ángulo puede ser negativo? Explique.
6. ¿La magnitud de un vector cualquiera puede ser negativa? ¿Por qué?

Nota: El documento se encontrará como **R 1.1** vectores y sus operaciones en el plano.pdf, como recurso de presentación y corresponde al reforzamiento previo sobre vectores en el plano y sus principales operaciones, y se podrá descargar del siguiente enlace:

https://drive.google.com/file/d/1da8BzP2U6I_uNhDc3xTgjO-KFLus4N0V/view?usp=sharing

3.2 Ecuación de la recta (plano)

Introducción

En esta unidad veremos el estudio de la ecuación de la recta en sus distintas formas de representación analítica, y geométrica, en donde se considerarán elementos de la recta, tales como distancia entre 2 puntos, pendiente de una recta, ángulo, etc.; además de rectas paralelas y perpendiculares.

Todo ello como base para comprender posteriormente la ecuación de la recta en su forma vectorial y ecuación del plano.

Historia de la Geometría Euclidiana a Analítica

Euclides (325 -265 a.C) desarrolló conceptos primitivos para la Geometría Euclidiana que no requerían definición, tales como: punto, recta y plano, pero en la Geometría Analítica se abandona el compás y la regla como herramientas necesarias, para dar lugar a las coordenadas de los puntos, ecuaciones de rectas, curvas y superficies (Vargas,2020). Sin embargo, para estudiar a la ecuación de la recta es necesario conocimientos de la geometría Euclidiana, tales como paralelismo, perpendicularidad, ángulos, teorema de Pitágoras, etc.

Definición de recta

Una recta es el conjunto de todos los puntos cuya relación de sus coordenadas cumplen una relación de primer grado. Es decir, consideremos dos puntos en el plano xy .

Podemos unirlos de muchas maneras, entre ellas, una línea recta, la cual resulta ser la unión más corta entre dos puntos tal como lo muestra la figura 41 (Vargas, 2020).

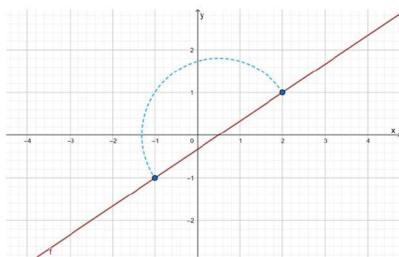


Figura 41. la recta en $\mathbb{R}^2$

La línea recta

Analíticamente, es una ecuación lineal o de primer grado en dos variables. Recíprocamente, la representación gráfica del lugar geométrico cuya ecuación sea de primer grado en dos variables es una recta.

Una recta queda determinada completamente si se conocen dos condiciones: **dos de sus puntos**, o **un punto y su dirección** (pendiente o coeficiente angular), etc.

Cuando la recta se inclina **hacia arriba de izquierda a derecha**, se dice que esta recta tiene **pendiente positiva**. Cuando la recta se inclina **hacia abajo de izquierda a derecha**, se dice que esta recta tiene **pendiente negativa**. Cuando la recta es **horizontal**, la pendiente de la recta **es 0**. Cuando la recta es vertical, la pendiente de la recta **no está definida** (Posada, 2012).

Elementos de una recta

- ❑ **Puntos:** Aunque una recta pasa por infinitos puntos, es necesario tener definidos dos puntos para determinar algunos elementos que hacen parte de la recta. En la figura 42 se muestran dos de ellos:
 - ❑ Punto P_1 tiene las coordenadas (x_1, y_1) .
 - ❑ Punto P_2 tiene las coordenadas (x_2, y_2) .

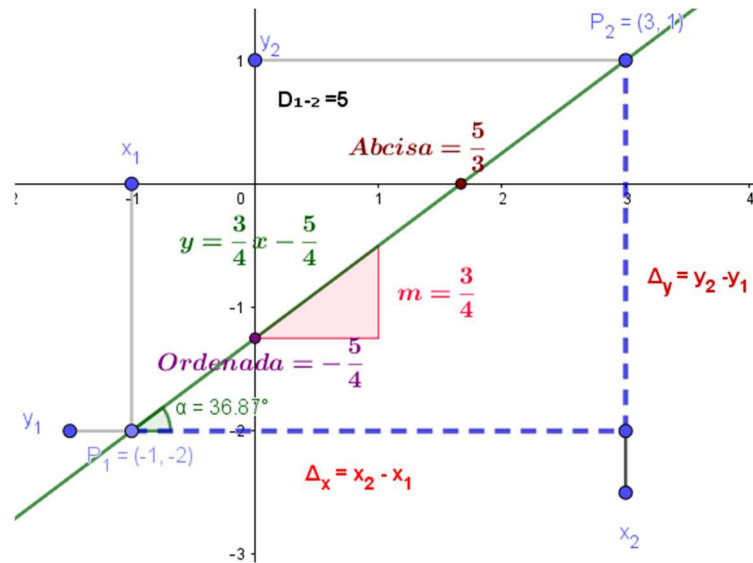


Figura 42. Elementos de una recta en $\mathbb{R}^2$. Fuente: autoría propia.

- **Pendiente m .** Se entiende por pendiente m como la tangente del ángulo que forma la recta con respecto al eje horizontal. Para calcularla se considera un par de puntos que hacen parte de la recta. Es decir:

Si se tiene los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$. (ver figura 42) para hallar la pendiente de dicha recta se calcula como:

$$m = \tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

También se puede calcular como: $m = \tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

- **Ángulo de inclinación de una recta (α).** Es el ángulo que forma la recta con el sentido positivo del eje x , medido en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Se mide de 0 a 180° . Para determinar el valor de este ángulo, se emplea la siguiente ecuación:

$$\alpha = \tan^{-1}(m)$$

En la figura 42 se observa la pendiente de una recta y el ángulo de inclinación respectiva.

- **Abcisa con el origen a .** Es el punto donde se intercepta la recta con el eje x .
- **La ordenada al origen de una recta b .** Es el punto donde se intercepta la recta con el eje y .

En la figura 42 se observa la abcisa y la ordenada con el origen de una recta.

- ❑ Distancia entre dos puntos $D_{(1-2)}$. Es la equivalente al segmento de recta que une los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, la cual se determina con la siguiente expresión matemática:

$$D_{1-2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \Rightarrow \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Dados 2 puntos: $P_1 = (-1, -2)$ y $P_2 = (3, 1)$, la distancia es

$$D_{1-2} = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (1 - (-2))^2} \Rightarrow \sqrt{(4)^2 + (3)^2} \Rightarrow \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

NOTA: Distancia también se le conoce como módulo de un vector, hipotenusa de un triángulo rectángulo (de acuerdo con el Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$). Véase figura 42.

- ❑ **Recta:** Un conjunto infinito de puntos alineados en una única dirección. Vista en un plano, una recta puede ser horizontal, vertical o diagonal (inclinada a la izquierda o a la derecha).
- ❑ Encontrar una expresión algebraica (función $f(x)$ ó y) que determine a esa misma recta se llama **ecuación de la recta**. Véase figura 42. Donde $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$
- ❑ **Nota:** Las partes de una recta se pueden apreciar en: <https://www.geogebra.org/m/bq3wuxtd>

Formas de ecuación de la recta.

Ecuación de una recta en $\mathbb{R}^2$. Toda recta se expresa de manera matemática por medio de una ecuación que puede expresarse de cuatro formas diferentes, además de la ecuación general $Ax + By + C = 0$:

Datos de partida	Ecuación a emplear
Ordenada en el origen b y la pendiente m	Explícita $y = mx + b$
Un punto P y la pendiente m	Punto-pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$
Dos puntos	Punto-punto $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
Corte a con eje X y corte b con eje Y	Simétrica $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$



Formas de ecuación de la recta. Pendiente.

Puntos dados:	$P_1 = (-1, -2)$ y $P_2 = (3, 1)$
Considerando que los puntos dados corresponden a:	$P_1 = (-1, -2) = (x_1, y_1)$ $P_2 = (3, 1) = (x_2, y_2)$

Pendiente m de la recta L_{AB}

Expresión gráfica por emplear: $m = \tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$m = \tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - (-2)}{3 - (-1)} = \frac{3}{4}$ $m = \frac{3}{4}$
---	--

La pendiente de la recta es: $m = \frac{3}{4}$

Interpretación: por cada 4 que se desplaza a la derecha sube 3, como se puede apreciar en la figura 42.

Ecuación punto-punto.

Puntos dados:	$P_1 = (-1, -2)$ y $P_2 = (3, 1)$
Considerando que los puntos dados pueden corresponder también a:	$P_1 = (3, 1) = (x_1, y_1)$ $P_2 = (-1, -2) = (x_2, y_2)$

Ecuación punto - punto

Expresión gráfica por emplear: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$	Nota: Tomaremos a $P_1 = (3, 1)$: $y - (1) = \frac{-2 - 1}{-1 - 3}(x - 3)$ $y - 1 = \frac{-3}{-4}(x - 3)$
--	--

La ecuación punto - punto es igual a la ecuación punto-pendiente: $y - 1 = \frac{3}{4}(x - 3)$ cómo se puede apreciar en la figura 42.

El ángulo que forma la recta con respecto al eje x:

Expresión gráfica por emplear:

$$\alpha = \tan^{-1} m$$

$$\alpha = \tan^{-1} m = \tan^{-1} \left(\frac{3}{4} \right)$$

$$\alpha = 36.87^\circ$$

El ángulo que forma la recta con respecto al eje x es: $\alpha = 36.87^\circ$ (Ver figura 42)

Ecuación punto pendiente

Expresión gráfica por emplear:

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

Recordando que podemos tomar a P_1 o P_2 , por lo que se toma a:

$$(3,1) = P_1 = (x_1, y_1)$$

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

$$y - (1) = \frac{3}{4} (x - 3)$$

$$\text{Finalmente, } y - 1 = \frac{3}{4} (x - 3)$$

La ecuación punto pendiente de la recta es= $y - 1 = \frac{3}{4}(x - 3)$. Véase figura 43.

Ecuación pendiente y ordenada al origen:

De la ecuación anterior, se pretende llegar a:

$$y = mx + b$$

Partiendo de: $y - 1 = \frac{3}{4}(x - 3)$ se despeja la variable y:

$$y = \frac{3}{4}(x - 3) + 1$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4} + 1$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

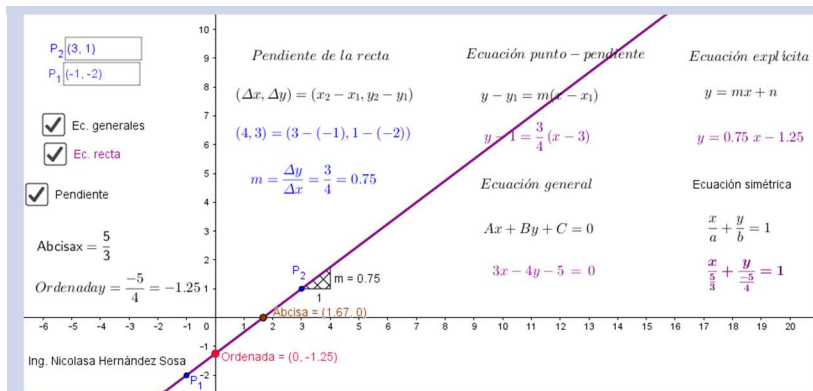


Figura 43. Formas de ecuación de la recta

La ecuación pendiente y ordenada al origen de la recta es: $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ También llamada **explícita o pendiente – intersección**. Véase figura 43.

Ecuación general:

De la ecuación anterior, se pretende llegar a:

$$Ax + By + C = 0$$

Partiendo de: $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ se dejan todos los términos en el primero miembro de la igualdad independiente:

$$\frac{3}{4}x - y - \frac{5}{4} = 0$$

También se puede expresar como:

$$3x - 4y - 5 = 0$$

La ecuación general de la recta es: $3x - 4y - 5 = 0$. Véase figura 43.

Ecuación forma simétrica:

De la ecuación anterior, se pretende llegar a:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Partiendo de: $3x - 4y - 5 = 0$ se deja en el segundo miembro de la igualdad el término independiente:

$$3x - 4y - 5 = 0$$

Es decir, $3x - 4y = 5$ Luego se divide toda la expresión por el término independiente: $\frac{3x}{5} - \frac{4y}{5} = \frac{5}{5}$

Esta ecuación es equivalente a:

$$\frac{x}{5/3} - \frac{y}{5/4} = 1$$

La ecuación en forma simétrica de la recta es: $\frac{x}{5/3} - \frac{y}{5/4} = 1$. Véase figura 43

Abscisa con el origen:

Para hallar la abscisa con el origen, se emplea cualquier ecuación y se reemplaza:

$$y = 0$$

Usando la ecuación general: $3x - 4y - 5 = 0$ reemplazando $y=0$, e obtiene:

$$3x - 0 - 5 = 0$$

$$3x = 5$$

$$x = \frac{5}{3}$$

Esto quiere decir que el punto $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ pertenece a la recta y por consiguiente

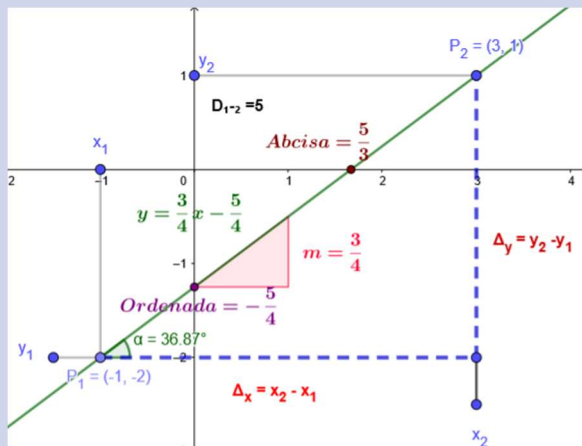
$$a = \frac{5}{3}$$

La abscisa con el origen es: $a = \frac{5}{3}$. Véase figura 42.

La ordenada al origen de una recta b:

Para hallar la ordenada con el origen, se emplea cualquier ecuación y se reemplaza:

$$x = 0$$



Usando la ecuación general:

$3x - 4y - 5 = 0$, reemplazando $x=0$, e obtiene:

$$3(0) - 4y - 5 = 0$$

$$-4y = 5$$

$$y = -\frac{5}{4}$$

Esto quiere decir que el punto $\left(0, -\frac{5}{4}\right)$ pertenece a la recta y que la ordenada al origen es:

$$b = -\frac{5}{4}$$

La ordenada al origen de la recta es: $b = -\frac{5}{4}$

La abscisa (a) y ordenada(b) al origen de una recta:

Se pueden hallar directamente de la ecuación simétrica de la recta:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{5/3} + \frac{y}{-5/4} \Rightarrow a = \frac{5}{3}, b = -\frac{5}{4}$$

La ordenada al origen de la recta es: $a = \frac{5}{3}$

La ordenada al origen de la recta es: $b = -\frac{5}{4}$

En conclusión, la recta que interseca a los ejes coordenados en (a,0) y (0, b) tienen por ecuación a:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ con } a, b \neq 0$$

Por lo tanto, la pendiente de esta recta es $m = -\frac{b}{a}$. Véase figura 42.

De la simétrica a la forma General $Ax + By + C = 0$:

La forma simétrica de la recta:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Considerando la regla:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{x}{5/3} + \frac{y}{-5/4} = 1 \Rightarrow \text{sustituyendo tenemos:}$$

$$\frac{x(-\frac{5}{4}) + (\frac{5}{3})y}{(\frac{5}{3})(-\frac{5}{4})} = 1 \quad \frac{-\frac{5}{4}x + \frac{5}{3}y}{-\frac{25}{12}} = 1$$

$$-\frac{5}{4}x + \frac{5}{3}y = -\frac{25}{12} \quad -\frac{60}{4} + \frac{60}{3}y = -25$$

$$-\frac{15x}{5} + \frac{20}{5}y = -\frac{25}{5} \Rightarrow -3x + 4y + 5 = 0$$

La ecuación general queda: $3x - 4y - 5 = 0$

NOTA: Las diferentes formas de representar a la recta se pueden apreciar en:

<https://www.geogebra.org/m/qjsycrwk>

Ecuación normal de una recta:

La forma normal se obtiene de la forma general de la recta $Ax + By + C = 0$, donde se divide cada una de las partes por el valor $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$:

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

$$3x - 4y - 5 = 0$$

$$A = 3, B = -4, C = -5 \Rightarrow$$

sustituyendo tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{3x}{\pm\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} - \frac{4y}{\pm\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} - \frac{5}{\pm\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} &= 0 \\ \frac{3x}{5} - \frac{4y}{5} - \frac{5}{5} &= 0 \Rightarrow \frac{3x}{5} - \frac{4y}{5} - 1 = 0 \end{aligned}$$

La ecuación en su forma normal queda: $\frac{3x}{5} - \frac{4y}{5} - 1 = 0$, y de aquí se puede obtener la simétrica y la distancia al origen, que sería 5.

NOTA: Las diferentes formas de representar a la recta se pueden apreciar en:

<https://www.geogebra.org/m/qjsycrwk>

Rectas paralelas y rectas perpendiculares

La pendiente de una recta es útil para determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares. Dos rectas no verticales con la **misma pendiente** son **paralelas**, y dos rectas no verticales cuyas **pendientes son recíprocas negativas** son **perpendiculares** (Larson, 2014). Véase figura 44.

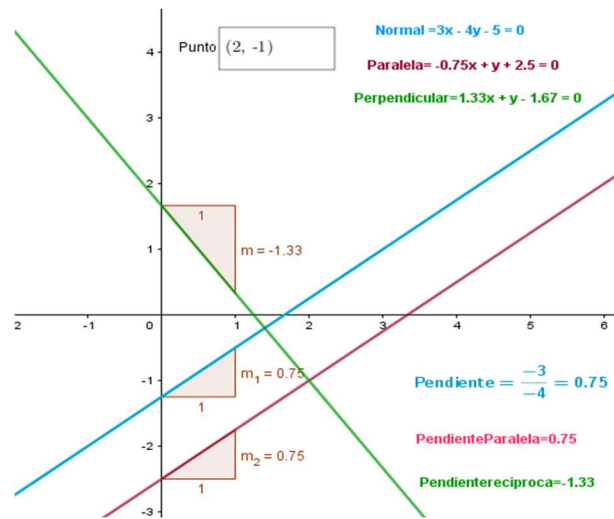


Figura 44. Recta paralela y perpendicular a una recta en R^2 . Fuente: autoría propia.

Ejemplo

Encuentre la forma general de las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(2, -1)$, y a) son paralelas y b) perpendiculares a la recta $3x - 4y - 5 = 0$

Solución: Se comienza por escribir la ecuación lineal $3x - 4y - 5 = 0$ en forma de pendiente intersección

$$3x - 4y = 5$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \text{ Forma pendiente - intersección, la pendiente } m = \frac{3}{4}$$

$$\text{a) } y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \text{ Forma pendiente - intersección, la pendiente } m = \frac{3}{4}$$

La recta que pasa por $(2, -1)$ que es paralela a la recta tiene pendiente $\frac{3}{4}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = \frac{3}{4}(x - 2)$$

$$4(y + 1) = 3(x - 2)$$

$$4y + 4 = 3x - 6$$

$$3x - 4y - 10 = 0 \text{ Forma general recta paralela}$$

$$\text{b) } y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \text{ Forma pendiente - intersección, la pendiente } m = \frac{3}{4}$$

La recta que pasa por $(2, -1)$ que es perpendicular a la recta tiene pendiente recíproco

negativo: $-\frac{4}{3}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = -\frac{4}{3}(x - 2)$$

$$3(y + 1) = -4(x - 2)$$

$$3y + 3 = -4x + 8$$

$$4x - 3y - 5 = 0 \text{ Forma general recta perpendicular}$$

Nota: El ejemplo completo de la figura 44 se puede apreciar en:

<https://www.geogebra.org/m/r9cspmqp>

Aplicación de ecuación de la recta.

A Dania su mamá le compró un celular, tiene que pagar una renta mensual de \$100.00 más \$1.20 por cada minuto o fracción de minuto que hable.

Utilice la letra y para representar el total el pago mensual y la x para representar el número de minutos de tiempo aire.

a) A partir de conocer que por 5 minutos debe pagar \$106.00 y que por 15 minutos debe pagar \$ 118.00. Ubique las parejas de puntos en el plano cartesiano.

b) Complete la tabla

No. Minutos x	5	10	20	30	40	48	55	60	65	70	75	85	95	100
Pago y	106	112	124	136	148	157.6	166	172	178	184	190	202	214	220

a) La situación anterior tiene por solución a la ecuación de la recta de dos puntos (punto - punto). Considerando a A (5,106) y B (15,118):

Solución en sus distintas formas:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 106 = \frac{118 - 106}{15 - 5}(x - 5)$$

$$y - 106 = \frac{6}{5}(x - 5) \Rightarrow y = \frac{6}{5}x + 100 \Rightarrow 12x - 10y + 1000 = 0$$

Nota: El documento completo se podrá consultar y descargar como **R 1.3 Rectas y ecuación de la recta.pdf**, en el siguiente enlace:

<https://drive.google.com/file/d/1hDsd79HanpgfZ7WafhYIAWc4madBgUzH/view?usp=sharing>

3.3 Vectores en el espacio

Introducción

Los vectores son muy importantes, matemáticamente es un segmento orientado de flecha que representa magnitudes vectoriales. Puede ser en el plano o en el espacio.

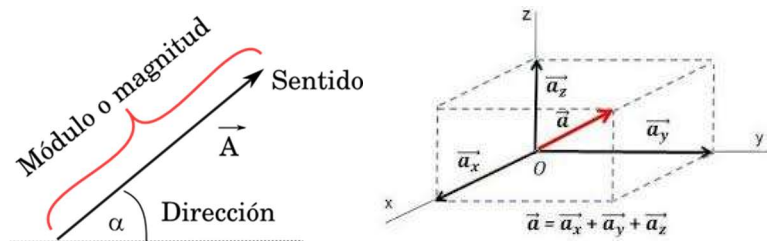
Su representación geométrica es un vector que posee módulo, dirección y sentido. Véase figura 23.

Las aplicaciones son diversas, desde navegación, representación de fuerzas, matrices, energía, etc.

Enseguida se muestra la competencia y temas del programa de estudios de la asignatura de Cálculo Vectorial de la unidad 1, del plan de estudios de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales.

Competencia específica del tema 1. Vectores en el espacio

- ☐ Conoce y desarrolla las propiedades de las operaciones con vectores para resolver problemas de aplicación en las diferentes áreas de ingeniería.
- ☐ Determina ecuaciones de rectas y planos del entorno para desarrollar la capacidad de modelado matemático.



1. Vectores en el espacio

1.1 Definición de un vector en el plano y en el espacio y su interpretación geométrica.

1.2 Álgebra vectorial y su geometría.

1.3 Producto escalar y vectorial.

1.4 Ecuación de la recta.

1.5 Ecuación del plano.

1.6 Aplicaciones.

1.1 Definición de un vector en el plano y en el espacio y su interpretación geométrica

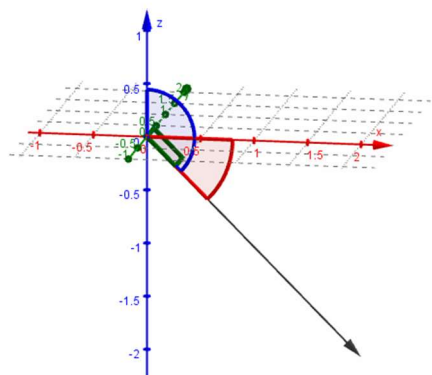


Figura 45. Vector en el espacio

□ Un vector bidimensional es un par ordenado $a = (a_1, a_2)$ de números reales. Un vector tridimensional es una terna ordenada $a = (a_1, a_2, a_3)$ de números reales. Los números a_1, a_2, a_3 se llaman componentes de a . Véase figura 45.

□ Una representación de vector $a = \langle a_1, a_2 \rangle$ es un segmento de recta dirigido $\overrightarrow{AB}$ desde cualquier punto $A(x, y)$ al punto $B(x+a_1, y+a_2)$. Una representación particular de a es el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{OP}$ del origen al punto $P(a_1, a_2)$ y (a_1, a_2) se llama vector de posición del punto $P(a_1, a_2)$. Del mismo modo en 3 dimensiones el vector $a = (a_1, a_2, a_3)$ es el vector de posición del punto $P(a_1, a_2, a_3)$.

Definición geométrica de un vector

El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado se llama **vector**. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se denomina **representación** del vector.

Definición algebraica de un vector

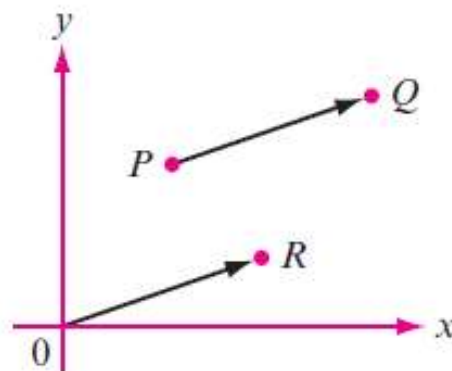
Un **vector** v en el plano xy (R^2) es un par ordenado de números reales (a, b) . Los números a y b se denominan **elementos** o

componentes del vector v . El **vector cero** es el vector $(0, 0)$. Figura 46. Vector cero

Véase figura 46.

Las definiciones geométrica y algebraica de un vector en R^2 se relacionan de la siguiente manera:

- Si $v = (a, b)$, entonces una representación de v es $\overrightarrow{OR}$, donde $R = (a, b)$.
- Si $v = (a, b)$, entonces la **magnitud de v** , denotada por $|v|$, está dada por $|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$



- Si $\mathbf{v}$ es un vector en $\mathbb{R}^2$, entonces la **dirección de $\mathbf{v}$** es el ángulo en $[0, 2\pi]$ que forma cualquier representación de $\mathbf{v}$ con el lado positivo del eje x . Véase figura 47.

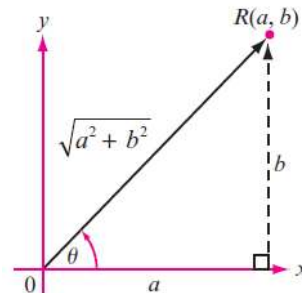


Figura 47. Representación de un vector en su forma geométrica y algebraica

$$\text{Si } \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

- Es un vector que tiene la representación $\overrightarrow{AB}$, donde el punto inicial es $A(x_1, y_1, z_1)$, y el punto terminal es $B(x_2, y_2, z_2)$, entonces debemos tener

- $x_1 + a_1 = x_2$; $y_1 + a_2 = y_2$, $z_1 + a_3 = z_2$, por lo tanto:
- $a_1 = x_2 - x_1$
- $a_2 = y_2 - y_1$
- $a_3 = z_2 - z_1$

Entonces tenemos el siguiente resultado: Dado los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$, el vector con representación $\overrightarrow{AB}$ es

$$\mathbf{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \text{ denominado } \underline{\text{vector director o de dirección.}}$$

Ejemplo 1

Encuentre el vector representado por el segmento de recta dirigido con el punto inicial $A(2, -3, 4)$ y punto terminal $(-2, 1, 1)$

- $\mathbf{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
- $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} = (-2 - 2, 1 - (-3), 1 - 4) = (-4, 4, -3)$

Distancia (longitud), magnitud o módulo.

$$\mathbf{v} = \langle x, y \rangle \text{ es } |\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dirección:

Magnitud en el espacio:

$$\mathbf{v} = \langle x, y, z \rangle \text{ es } |\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ejemplo 2(en el plano R^2)

Expresa, en notación canónica y por componentes, el vector cuyo inicio está en el punto A (4,-1) y que termina en el punto B (6,7). Determina el módulo del vector y su dirección:

Solución: El vector puede ser representado de las siguientes formas:

$$\overrightarrow{AB} = (6 - 4, 7 - (-1)) = (2, 8)$$

El valor del módulo es:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (8)^2} = \sqrt{68}$$

La dirección queda determinada por

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8}{2}\right) = \tan^{-1}(4), \theta \approx 75.96^\circ$$

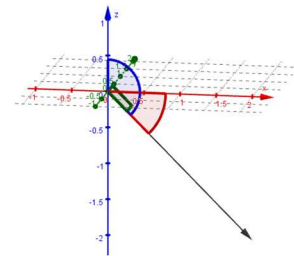
El vector $\overrightarrow{PQ}$ también puede representarse mediante la notación canónica, por medio de sus componentes (en el espacio):

$$\overrightarrow{PQ} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

$$\overrightarrow{PQ} = \langle V_x, V_y, V_z \rangle$$

El módulo de $\overrightarrow{PQ}$ es:

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{V}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



En un sistema espacial, la dirección de $\overrightarrow{PQ}$ está dada por los

cosenos directores, los cuales se obtienen de la relación de los componentes V_x , V_y y

V_z y el módulo del vector $= |\overrightarrow{V}|$

$$\cos \theta_x = \frac{V_x}{|\overrightarrow{V}|} \quad \cos \theta_y = \frac{V_y}{|\overrightarrow{V}|} \quad \cos \theta_z = \frac{V_z}{|\overrightarrow{V}|},$$

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

$$\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{V_x}{|\overrightarrow{V}|}\right) \quad \theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{V_y}{|\overrightarrow{V}|}\right) \quad \theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{V_z}{|\overrightarrow{V}|}\right)$$

Ejemplo 3 (en R^3)

Expresa, en notación canónica y por componentes, el vector que inicia en el punto A (2,3,5) y termina en el punto B (1,-4,7); además calcula su módulo y su dirección.

Solución:

El vector $\overrightarrow{AB}$ puede representarse como:

$$\overrightarrow{AB} = \langle 1-2, -4-3, 7-5 \rangle$$

$$\overrightarrow{AB} = \langle -1, -7, 2 \rangle$$

El módulo (distancia o longitud) es igual a: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2 + (2)^2} = \sqrt{54}$

La dirección está determinada por los cosenos directores:

$$\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{54}}\right) = 97.82^\circ, \quad \theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{54}}\right) = 162.28^\circ, \quad \theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{54}}\right) = 74.21^\circ$$

1.2 Álgebra vectorial y su geometría.

Suma de vectores: Existen 2 formas de sumar vectores.

- ☐ Gráfica (mediante el método del paralelogramo, por la regla del triángulo y el método polígono).
- ☐ Analítica (mediante las componentes rectangulares).



Figura 48. Regla del triángulo y regla del paralelogramo

Definición de suma vectorial

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores colocados de modo que el punto inicial de $\mathbf{v}$ esté en el punto terminal de $\mathbf{u}$, entonces la **suma** $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es el vector del punto inicial de $\mathbf{u}$ al punto terminal de $\mathbf{v}$ (Ver figura 48).

El método del polígono se utiliza cuando se tienen más de 3 vectores. El procedimiento consiste en colocar el origen del vector B en el extremo de la flecha del vector A. El origen del vector C es el extremo de la flecha del vector B y así sucesivamente; para obtener la resultante R, se une el origen del primer vector con el extremo de la flecha del último vector, como se muestra en la figura 49:

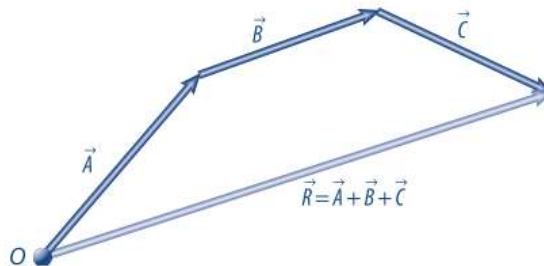


Figura 49. Método del polígono

La suma de vectores es:

- Si $\mathbf{u} = [a_1, b_1]$, y $\mathbf{v} = [a_2, b_2]$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = [a_1 + a_2, b_1 + b_2]$

- Si $u = [a_1, b_1, c_1]$, y $v = [a_2, b_2, c_2]$, entonces:

$$u + v = [a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2]$$

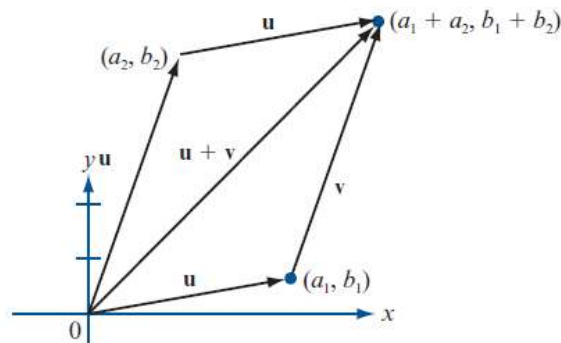


Figura 50. Suma de vectores

Diferencia de vectores $u - v$ se entiende $u - v = u + (-v)$, si $u = (a_1, a_2)$ y $v = (b_1, b_2)$ entonces:

$$u - v = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

Multiplicación por un escalar, en donde α un número real (escalar). Entonces se define:

$$\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$

Propiedades de los vectores

Si a, b y c son vectores en v_n y c y d son escalares, entonces:

- | | |
|-------------------------|--------------------------------|
| 1. $a + b = b + a$ | 2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ |
| 3. $a + 0 = a$ | 4. $a + (+a) = 0$ |
| 5. $c(a + b) = ca + cb$ | 6. $(c + d)a = ca + da$ |
| 7. $(cd)a = c(da)$ | 8. $1a = a$ |

$$\begin{aligned}
 a + b &= \langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \\
 &= \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle + \langle a_1, a_2 \rangle \\
 &= b + a
 \end{aligned}$$

Se puede ver la propiedad 2 (ley asociativa) es cierta al observar la figura 51 y aplicar la ley de triángulo varias veces:

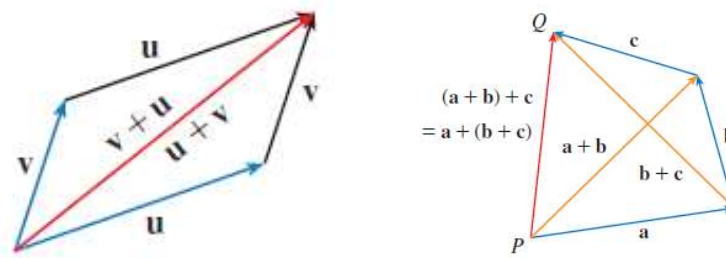


Figura 51. Ley del triángulo

Ejemplo 4. Si $u = (4,0,3)$ y $v = (-2,1,5)$

Encuentre $|u|$, y los vectores $u + v$, $u - v$, $3v$ y $2u + 5v$

- a) $|u| = |u| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$
- b) $u + v = (4,0,3) + (-2,1,5) = \langle 2, 1, 8 \rangle$
- c) $u - v = (4,0,3) - (-2,1,5) = \langle 6, -1, -2 \rangle$
- d) $3v = 3(-2,1,5) = \langle -6, 3, 15 \rangle$
- e) $2u + 5v = 2(4,0,3) + 5(-2,1,5) = \langle -2, 5, 31 \rangle$

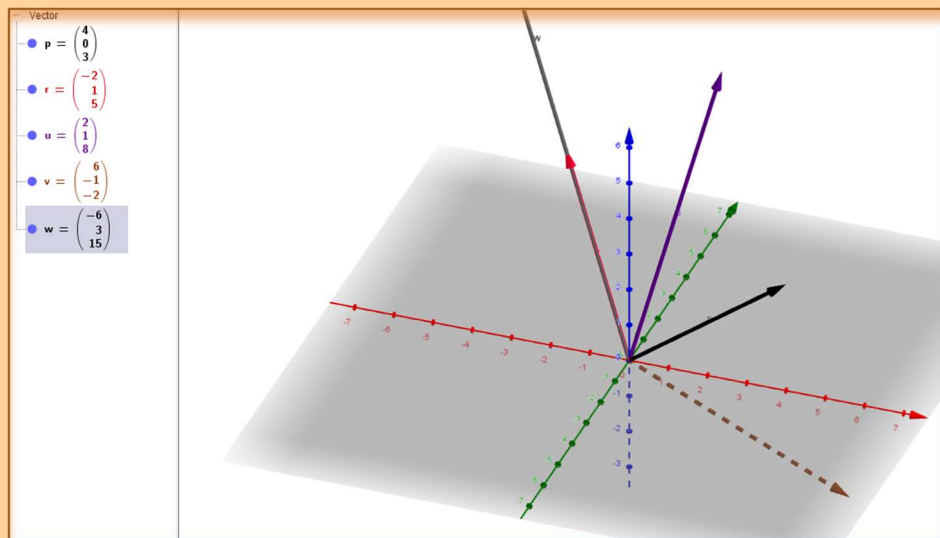


Figura 52. Ejemplo 4. Comprobación en GeoGebra

Componentes rectangulares (Analítica).

Las componentes rectangulares se llaman así porque son perpendiculares entre sí y forman un ángulo recto. Si se utiliza un marco de referencia, como el plano cartesiano xy , las componentes rectangulares se pueden representar por medio el uso de la trigonometría como la proyección del vector sobre los ejes x y y (véase figura 53).

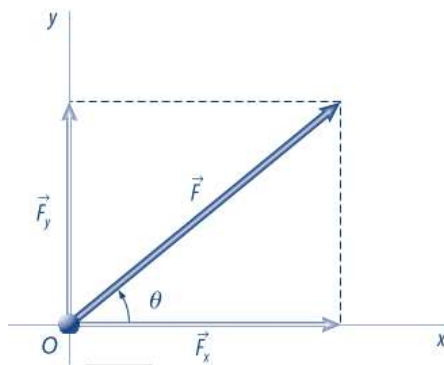


Figura 53. Componentes rectangulares

Las componentes rectangulares de $\vec{F}$ son $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$ y se obtienen de la siguiente forma:

$$\vec{F}_x = \vec{F} \cos \theta, \vec{F}_y = \vec{F} \sin \theta$$

A las cantidades escalares F_x y F_y se les llama componentes escalares de $\vec{F}$, de modo que los vectores tienen componentes vectoriales y escalares.

Recuerda que la Ley de los senos es:

los senos es:

$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

Y se representa de la

siguiente forma:

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos a$$

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2AC \cos b$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos c$$

$$A = \sqrt{B^2 + C^2 - 2BC \cos a}$$

$$B = \sqrt{A^2 + C^2 - 2AC \cos b}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos c}$$

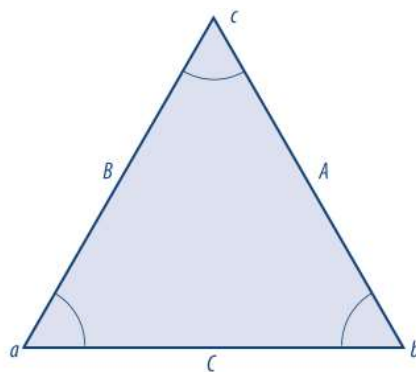


Figura 54. Ley de los senos

Vectores unitarios

- Tres vectores en v_3 juegan un papel espacial. Sean $i = \langle 1, 0, 0 \rangle$ $j = \langle 0, 1, 0 \rangle$ $k = \langle 0, 0, 1 \rangle$
- Estos vectores i, j, k se denominan vectores base estándar. Tienen longitud 1 y apuntan en las direcciones de los ejes positivos. De manera similar, en 2 dimensiones se define $i = \langle 1, 0 \rangle$ $j = \langle 0, 1 \rangle$

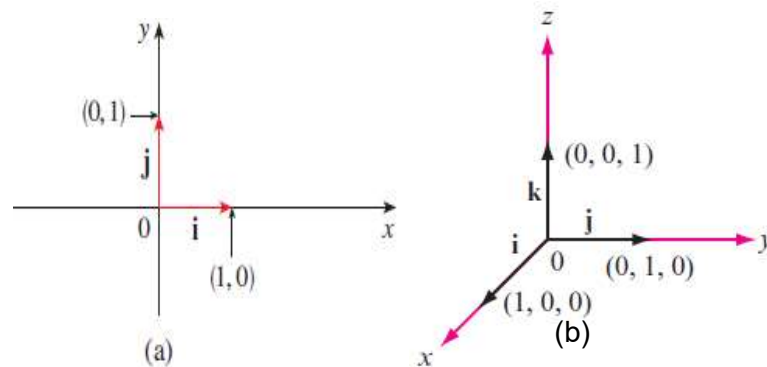


Figura 55. a Vectores unitarios en R^2 . b. Vectores unitarios en R^3 .

Si $a = (a_1, a_2, a_3)$, entonces se puede escribir:

$$\begin{aligned} a &= (a_1, a_2, a_3) = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) \\ &= a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) \\ &= a_1i + a_2j + a_3k \end{aligned}$$

Así, cualquier vector en v_3 se puede expresar en términos de los vectores base estándar i, j, k .

Ejemplo 5:

$$(1, -2, 6) = i - 2j + 6k$$

De manera similar, en dos dimensiones (véase figura 56), se puede escribir:

$$a = (a_1, a_2) = a_1i + a_2j$$

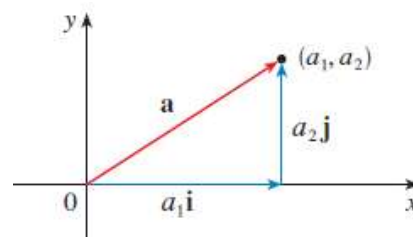


Figura 56. Ejemplo 5

En resumen, un punto $\bar{v}$ en R^3 se puede escribir como $= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = xi + yj + zk$

Ejemplo 6:

$$(1, -2, 6) = i - 2j + 6k$$

Ejemplo 7: Si $a = i + 2j - 3k$ y $b = 4i + 7k$, exprese el vector $2a + 3b$ en términos de i , j y k .

Solución: se emplean las propiedades 1, 2, 5, 6 y 7 de los vectores para obtener:

$$\begin{aligned} 2a + 3b &= 2(i + 2j - 3k) + 3(4i + 7k) \\ &= 2i + 4j - 6k + 12i + 21k = \mathbf{14i + 4j + 15k} \end{aligned}$$

Un vector unitario (indica la dirección) es un vector cuya longitud es 1. Por ejemplo, i , j y k son vectores unitarios. En general, si $a \neq 0$, entonces el vector unitario que tiene la misma dirección que a es:

$$u = \frac{1}{|a|} a = \frac{a}{|a|}$$

A fin de comprobar esto, sea $c = \frac{1}{|a|}$.

Entonces $u = ca$ y c es un escalar positivo, así que u tiene la misma dirección que a . También,

$$|u| = |ca| = |c||a| = \frac{1}{|a|} |a| = 1$$

Ejemplo 8. Encuentre el vector unitario en la dirección del vector $2i - j - 2k$

El vector dado tiene longitud (rapidez)

$$|2i - j - 2k| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Así, por la ecuación de dirección, el vector unitario con la misma dirección es: $u = \frac{1}{|a|} a = \frac{a}{|a|}$

$$\frac{1}{3}(2i - j - 2k) = \frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k$$

Usar el comando **Vector Unitario[<Vector>]** en GeoGebra.

En resumen, podemos expresar cualquier vector no nulo v en términos del producto de sus 2 características fundamentales: longitud y dirección, escribiendo $v = |v| \frac{v}{|v|}$

Si $v \neq 0$, entonces:

1. $\frac{v}{|v|}$ es un vector unitario en la dirección de v ;
2. La ecuación $v = |v| \frac{v}{|v|}$ expresa a v en términos de su longitud y su dirección.

Ejemplo 9: Se aplica una fuerza de 6 N en la dirección del vector $v = 2i + 2j - k$.

Solución: El vector de fuerza tiene magnitud 6 y dirección $\frac{v}{|v|}$ entonces

$$F = 6 \frac{v}{|v|} = 6 \frac{2i + 2j - k}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 6 \frac{2i + 2j - k}{3} = 6 \left(\frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{1}{3}k \right)$$

1.3 Producto escalar y vectorial.

Producto escalar (producto interno o punto (PP))

Definición.

Si $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, entonces el producto punto de a y b es el número $a \cdot b$ dado por:

$$\text{Ángulo entre 2 vectores: } \theta = \cos^{-1} \left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|a||b|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{a \cdot b}{|a||b|} \right)$$

Ejemplo 10: Encuentre $a \cdot b$ y el ángulo.

$$a) \langle -1, 7, 4 \rangle \cdot \langle 6, 2, -\frac{1}{2} \rangle = (-1)(6) + 7(2) + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 6$$

$$b) \langle i + 2j - 3k \rangle \cdot \langle 2j - k \rangle = 1(0) + 2(2) + (-3)(-1) = 7$$

Si $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|a||b|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{a \cdot b}{|a||b|} \right)$$

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(-1)^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 49 + 16} = \sqrt{66}$$

$$|b| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \sqrt{6^2 + 2^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + 4 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{161}{4}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{6}{\sqrt{66} \sqrt{\frac{161}{4}}} \right) = 83.31^\circ$$

$$b) \langle i + 2j - 3k \rangle \cdot \langle 2j - k \rangle = 1(0) + 2(2) + (-3)(-1) = 7$$

Si $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|a||b|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{a \cdot b}{|a||b|} \right)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{5}} \right) = 33.21^\circ$$

Producto escalar (producto interno o punto). Propiedades.

Si a, b y c son vectores en V_3 y c es escalar, entonces:

1. $a \cdot a = |a|^2$
2. $a \cdot b = b \cdot a$
3. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
4. $(ca) \cdot b = c(a \cdot b) = a \cdot (cb)$
5. $0 \cdot a = 0$

Usando GeoGebra: Para 2 vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en el mismo espacio dimensional, la operación de producto punto se realiza escribiendo simplemente $u \cdot v$.

Producto escalar (producto interno o punto)

Al producto punto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ se le puede dar una interpretación geométrica en términos del **ángulo θ entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$** , que se define como el ángulo entre las representaciones de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ que:

Los físicos emplean la fórmula del siguiente teorema como la definición del producto punto.

TEOREMA. Si θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

COROLARIO Si θ es el ángulo entre los vectores no nulos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, entonces

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

Ejemplo 11: Determine el ángulo entre los vectores $\mathbf{a} = \langle 2, 2, -1 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 5, -3, 2 \rangle$

Puesto que

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3, \text{ y } |\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$$

Calculamos producto punto

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2(5) + 2(-3) + (-1)(2) = 2$$

Se tiene del corolario

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{2}{3\sqrt{38}}$$

Despejamos el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{2}{3\sqrt{38}} \right) \approx 1.46 \text{ (u } 84^\circ)$$

En **GeoGebra** existe un comando directo para obtener dicho ángulo:

Ángulo[<vector>, <vector>]

Vectores perpendiculares u ortogonales. Los vectores no nulos a y b se llaman perpendiculares u ortogonales si el ángulo entre ellos es $\emptyset = \frac{\pi}{2}$. Entonces el teorema da:

$$a \cdot b = |a||b| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Y a la inversa, si $a \cdot b = 0$, entonces $\cos \emptyset = 0$, por lo tanto, $\emptyset = \frac{\pi}{2}$. El vector 0 es considerado perpendicular a los 2 vectores. Para determinar si 2 vectores son ortogonales se tiene el siguiente método:

a y b son ortogonales si y sólo si $a \cdot b = 0$

Ejemplo 12. Demuestre que $2i+2j-k$ es perpendicular a $5i-4j+2k$

$$(2i + 2j - k) \cdot (5i - 4j + 2k) = 2(5) + 2(-4) + (-1)(2) = 0$$

Por lo tanto, estos vectores son perpendiculares

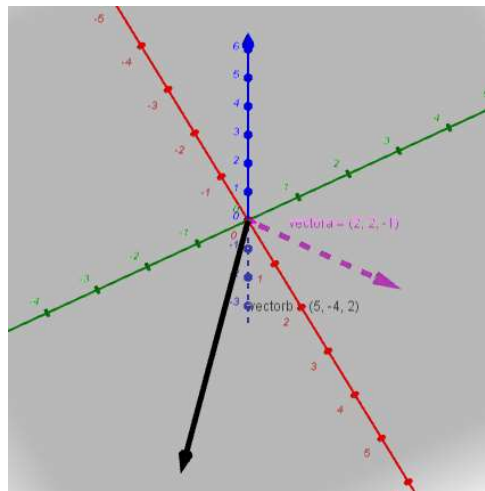
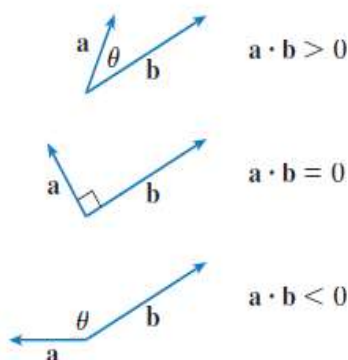


Figura 57. Representación en GeoGebra ejemplo 12.

Nota: El producto punto $a \cdot b$ es positivo si a y b apuntan en la misma dirección general, 0 si son perpendiculares y negativo si apuntan en direcciones opuestas generalmente. En el caso extremo donde a y b apuntan en exactamente la misma dirección, se tiene que $\emptyset = 0$, así que $\cos \emptyset = 1$ y $a \cdot b = |a||b|$

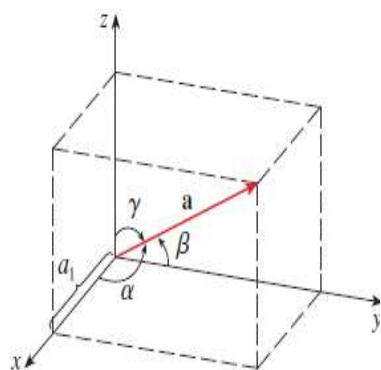
Si a y b apuntan en exactamente direcciones opuestas, entonces $\emptyset = \pi$ y, por lo tanto, $\cos \emptyset = -1$ y $a \cdot b = -|a||b|$



Ángulos y cosenos directores

Los ángulos directores de un vector $\mathbf{a}$ diferente de cero son los ángulos α , β y γ (en el intervalo $[0, \pi]$) que $\mathbf{a}$ forma con los ejes positivos x , y y z . Véase figura 58.

Los cosenos de estos ángulos directores, $\cos \alpha$, $\cos \beta$ y $\cos \gamma$, se llaman **cosenos directores** de un vector $\mathbf{a}$. Si se emplea el corolario con $\mathbf{i}$ en lugar de $\mathbf{b}$ se obtiene



$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{i}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}$$

$$\cos \beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}$$

Figura 58. Ángulos directores

Al elevar al cuadrado las expresiones anteriores y sumar, se ve que:

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, así tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle |\mathbf{a}| \cos \alpha, |\mathbf{a}| \cos \beta, |\mathbf{a}| \cos \gamma \rangle \\ &= |\mathbf{a}| \langle \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto;

$$\frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} = \langle \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \rangle$$

Lo cual dice que los cosenos directores de $\mathbf{a}$ son las componentes del vector unitario en la dirección de $\mathbf{a}$.

Ejemplo 13. Encuentre los ángulos de dirección del vector $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$.

Solución: $|a| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

Por lo tanto

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \approx 74^\circ; \beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) \approx 58^\circ;$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \approx 37^\circ$$

Producto cruz

Definición. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, se llama producto vectorial o cruz de ambos vectores, a la cantidad

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2)i - (u_1 v_3 - u_3 v_1)j + (u_1 v_2 - u_2 v_1)k$$

Nota: En GeoGebra, puedes escribir en la entrada $u \otimes v$ y te dará el producto vectorial

Ejemplo 14: Si $a = (1, 3, 4)$ y $b = (2, 7, -5)$ entonces,

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} k$$

Determinante de $2 \times 2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

$$= (-15 - 28)i - (-5 - 8)j + (7 - 6)k = -43i + 13j + k$$

El cual indica la dirección del vector $a \times b$

Teorema. El vector $a \times b$ es ortogonal a a y b

$$(a \times b) \cdot a = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3$$

$$= a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) - a_2(a_1 b_3 - a_3 b_1) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$= a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 - a_2 a_1 b_3 + a_2 a_3 b_1 + a_3 a_1 b_2 - a_3 a_2 b_1 = 0$$

Un cálculo similar muestra que $(a \times b) \cdot b = 0$. Por lo tanto, $a \times b$ es ortogonal a a y b .

Descripción geométrica del vector en $\mathbb{R}^3$

La **dirección** de un vector está dada por axb , para completar la descripción geométrica se necesita calcular la **longitud** $|axb|$, la cual se determina mediante el siguiente teorema:

Teorema: Si θ es el ángulo entre a y b (de modo que $0 \leq \theta \leq \pi$), entonces

$$|axb| = |a||b|\sin \theta$$

Corolario: Dos vectores no nulos a y b son paralelos si y sólo si

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

$$A = |a|(|b|\sin\theta) = |a \times b|$$

La extensión del producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es igual al área del paralelogramo determinado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

Ortogonalidad y longitud de $\mathbf{a} = (1, 3, 4)$ y $\mathbf{b} = (2, 7, -5)$

Siguiendo con el ejemplo anterior, la magnitud y ortogonalidad sería:

$$(a \times b) \cdot a = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3$$

$$(a \times b) \cdot a = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} 1 - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} 3 + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} 4$$

$$(a \times b) \cdot a = (-15 - 28) - (-5 - 8)3 + (7 - 6)4 \Rightarrow -43 + 39 + 4 = 0$$

Si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -43\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + \mathbf{k}$, entonces $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \theta$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2} \Rightarrow |\mathbf{a}| = \sqrt{26}$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{2^2 + 7^2 + (-5)^2} \Rightarrow |\mathbf{b}| = \sqrt{78}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1, 3, 4) \cdot (2, 7, -5) = 2 + 21 - 20 = 3$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}, \theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \right) \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{3}{|\sqrt{26}||\sqrt{78}|} \right) = 86.10^\circ$$

$$|axb| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \theta \Rightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{26}\sqrt{78} \sin(86.18^\circ) = \mathbf{44.93}$$

Ejemplo 15: Encuentre el vector perpendicular al plano que pasa por los puntos $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ y $R(1, -1, 1)$

Solución: El vector $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ es perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, por lo tanto, es perpendicular al plano a través de P, Q y R. Las direcciones son:

$$\overrightarrow{PQ} = (-2 - 1)\mathbf{i} + (5 - 4)\mathbf{j} + (-1 - 6)\mathbf{k} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PR} = (1 - 1)\mathbf{i} + (-1 - 4)\mathbf{j} + (1 - 6)\mathbf{k} = -5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Se calcula el producto cruz de estos vectores:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} \\ &= (-5 - 35)\mathbf{i} - (15 - 0)\mathbf{j} + (15 - 0)\mathbf{k} = -40\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 15\mathbf{k}\end{aligned}$$

Producto triple

El producto $a \cdot (b \times c)$ es la propiedad 5 que se denomina triple producto escalar de los vectores a , b y c . Véase figura 59.

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

La importancia geométrica del producto escalar triple se puede ver si consideramos el paralelepípedo determinado por los vectores a , b y c .

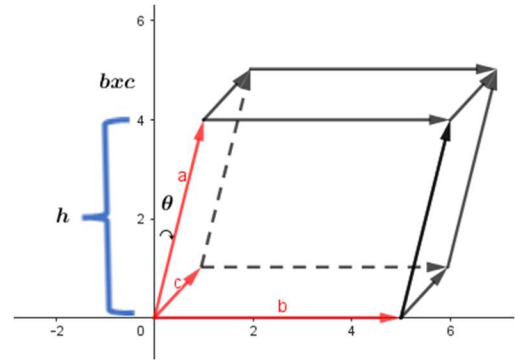


Figura 59. Paralelepípedo

Volumen del paralelepípedo

El área del paralelogramo base es $A = |b \times c|$. Si θ es el ángulo entre a y $b \times c$, entonces la altura h del paralelepípedo es $h = |a| |\cos \theta|$

Por lo tanto, el volumen del paralelepípedo es:

$$V = Ah = |b \times c| |a| |\cos \theta| = |a \cdot (b \times c)|, \text{ Por lo que}$$

El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores a , b y c es la magnitud de su producto escalar triple:

$$V = |a \cdot (b \times c)|$$

Si al usar la fórmula del volumen del paralelepípedo determinado por los vectores a , b y c , entonces los vectores deben estar en el mismo plano; es decir, son **coplanares**.

Producto triple (Volumen del paralelepípedo)

$$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Ejemplo 16. Encuentra el volumen del paralelepípedo cuyos lados adyacentes son los vectores:

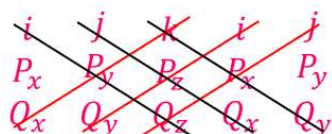
$$\vec{u} = (-2, 5, 3), \vec{v} = (1, 4, -3) \quad y \quad \vec{w} = (2, 5, -2),$$

Método 1. Definición: Sean $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ en R^3 se llama producto vectorial o cruz de ambos vectores, a la cantidad:

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \\ &= (v_2 w_3 - v_3 w_2)u_1 - (v_1 w_3 - v_3 w_1)u_2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)u_3 \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (v_2 w_3 - v_3 w_2)u_1 - (v_1 w_3 - v_3 w_1)u_2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)u_3 \\ &= ((4)(-2) - (-3)(5))(-2) - ((1)(-2) - (-3)(2))(5) + ((1)(5) - (4)(2))(3) \\ &= (-8 + 15)(-2) - (-2 + 6)(5) + (5 - 8)(3) \\ &= -14 - 20 - 9 = \mathbf{43} = \mathbf{43 u^3}\end{aligned}$$

Método 2 (Determinante):

Se duplican las 2 primeras columnas, la suma de los productos obtenidos a lo largo de la línea negra se resta de la suma de los productos obtenidos a lo largo de las líneas rojas:



$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= (-2)(4)(-2) + (5)(-3)(2) + (3)(1)(5) - (2)(4)(3) - (5)(-3)(-2) - (-2)(1)(5) \\ &= 16 - 30 + 15 - 24 - 30 + 10 = \mathbf{-43} = \mathbf{43 u^3}\end{aligned}$$

Ejemplo 17. Use el producto escalar triple para mostrar que los vectores $a = (1, 4, -7)$, $b = (2, -1, 4)$ y $c = (0, -9, 18)$ son coplanares.

$$\begin{aligned}a \cdot (b \times c) &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} \\ &= 1(18) - 4(36) - 7(-18) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Nota: Los temas 1.4 -1.6 los encontrarás desarrollados en la antología (**R 1.5**).

Problema 1

Se tira de un carrito a lo largo de un suelo liso horizontal con una fuerza F de 20 libras que forma un ángulo de 45° con el suelo como se muestra en la figura 60. ¿Cuál es la fuerza efectiva que mueve el carrito hacia adelante?

Solución: La fuerza efectiva es el componente horizontal de $F = \langle a, b \rangle$

$$a = |F| \cos 45^\circ = (20) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 14.14 \text{ lb}$$

Note que F es un vector bidimensional.

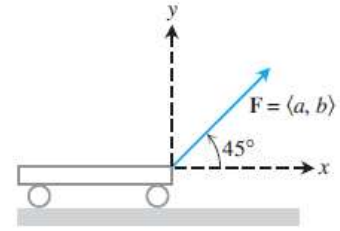


Figura 60. Problema 1

Problema 2

Un avión comercial, que vuela hacia el este a 500 millas por hora con cielo despejado, se encuentra un viento de cola de 70 millas por hora soplando en dirección de 60° al noreste. El avión mantiene el rumbo hacia el este, pero, debido al viento, adquiere una nueva rapidez y dirección respecto al suelo. ¿Cuáles son la rapidez y dirección?

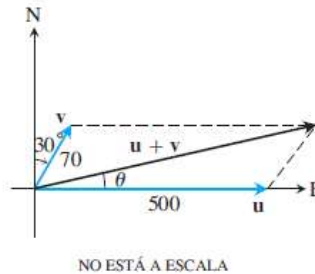


Figura 61. Los vectores que representan las velocidades del avión u y el viento de cola v del problema 2.

Solución: si u = la velocidad del avión y v = la velocidad del viento de cola, entonces $|u| = 500$ y $|v| = 70$. Ver figura 18. La velocidad del avión con respecto al suelo está dada por la magnitud y dirección del vector resultante $u + v$. Si el eje x positivo representa la dirección este y el eje y positivo representa la dirección norte, entonces los componentes de u y v son

$$u = (500, 0) \text{ y } v = (70 \cos 60^\circ, 70 \sin 60^\circ) = (35, 35\sqrt{3}),$$

Por lo tanto,

$$u + v = (535, 35\sqrt{3}) = 535i + 35\sqrt{3}j$$

$$|u + v| = \sqrt{535^2 + (35\sqrt{3})^2} \approx 538.4$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{35\sqrt{3}}{535} \right) \approx 6.5^\circ$$

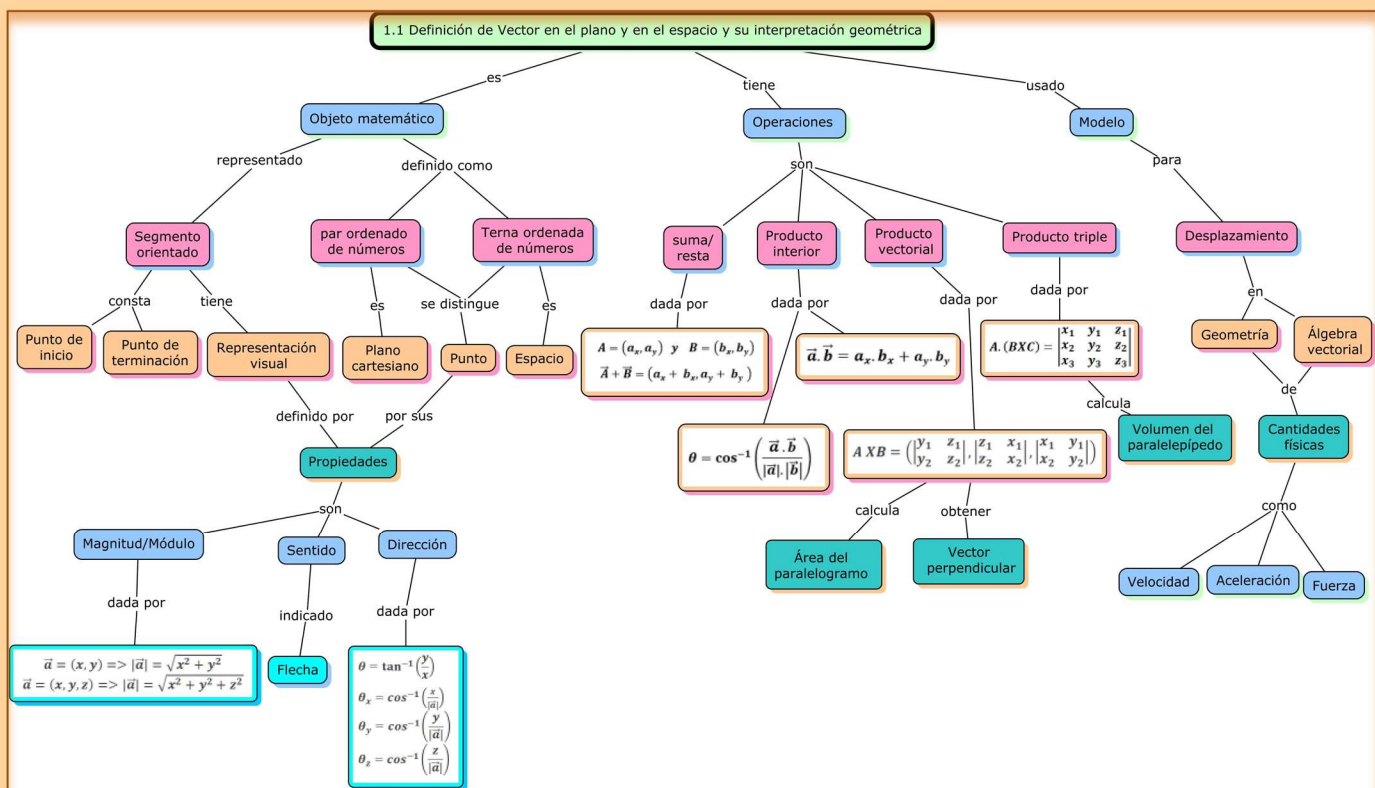
La nueva rapidez del avión respecto al suelo es de alrededor de 538.4 millas por hora, y su nueva dirección es de aproximadamente 6.5° al noreste.

Ejercicio/problema

Puedes revisar el problema del siguiente link:

<https://create.piktochart.com/output/47544545-ejemplo-1>

Conclusiones



NOTA: El documento se podrá consultar como recurso **R 1.2 vectores en el espacio.pdf**, en el siguiente enlace: <https://drive.google.com/file/d/1xnSa0GW8zuqNF-lkmSeRHGV1W89QFrHH/view?usp=sharing>

1.4 Ecuación de la recta

Una recta en el plano xy se determina cuando se dan un punto (x_1, y_1) sobre la recta y la dirección de ésta (su pendiente o ángulo de inclinación). La ecuación de la recta se puede escribir entonces con la forma **punto-pendiente**: $y - y_1 = m(x - x_1)$

De igual forma, una recta L en el espacio tridimensional se determina cuando se conoce un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ sobre L y su inclinación(dirección) dada por el vector $\vec{v} = (a, b, c)$ paralelo a la recta (también llamado **vector director**).

Por lo que si se tiene un **punto** $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un **vector director** $\vec{v} = (a, b, c)$ se puede determinar la **ecuación vectorial** de una recta:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

Considere la recta L , la cual es paralela al vector $\vec{v}$. El vector $\vec{v}$ será el vector de dirección de L , y a, b y c los números de dirección. Tal como se muestra en la figura 62.

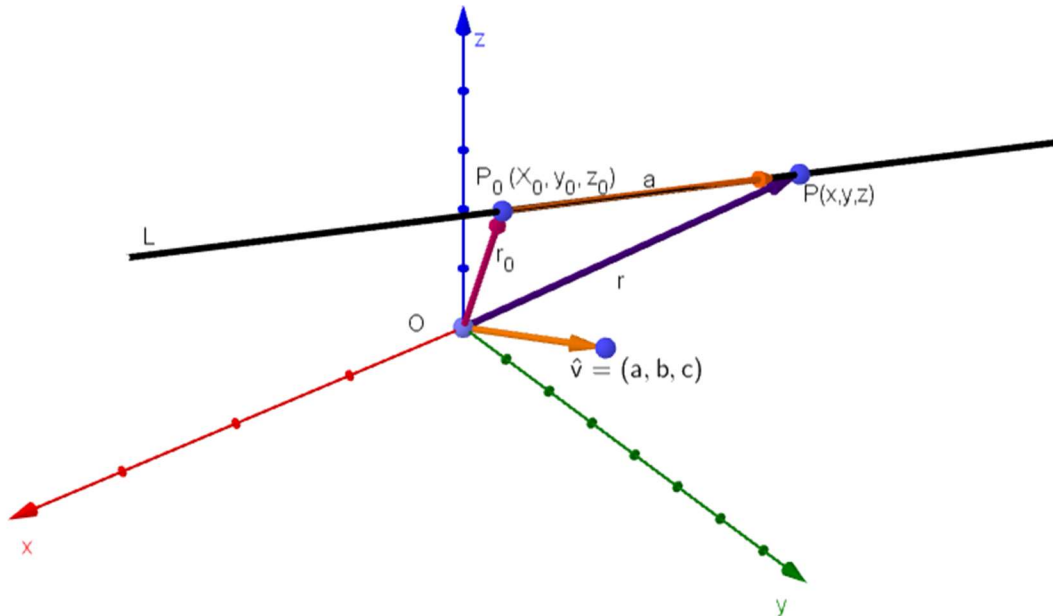


Figura 62. Recta en el espacio. Fuente: Autoría propia.

Sea $P(x, y, z)$ un punto arbitrario en L y sean r_0 y r los vectores de posición de P_0 y P . Si a es el vector (paralelo también) con representación $\overrightarrow{P_0P}$ como en la figura 62, entonces por la ley del triángulo para la suma de vectores tenemos a la **ecuación vectorial de L** como:

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, donde t es un escalar.

Cada valor del parámetro t da el vector de posición $\mathbf{r}$ de un punto en L .

Se puede definir la recta con el vector $\overrightarrow{P_0P}$ y con el vector $\vec{v} = (a, b, c)$ paralelo a la recta; de esta forma se formula el paralelismo entre ellos con la siguiente ecuación:

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}$$

$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = t(a, b, c)$, la cual es la **ecuación vectorial de la recta**.

Al igualar componentes con componentes se obtiene:

$$(x - x_1) = at \Rightarrow x = x_1 + at$$

$$(y - y_1) = bt \Rightarrow y = y_1 + bt$$

$$(z - z_1) = ct \Rightarrow z = z_1 + ct$$

Estas ecuaciones se conocen como **ecuaciones paramétricas** de una recta, ya que están en función del parámetro t . Cada valor de t proporciona un punto sobre la recta L .

Si todos los números de dirección a , b y c no son nulos, se **elimina el parámetro t** y se obtiene la **ecuación simétrica** de una recta:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Ejemplo 1.

- Encuentre una ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto $(5, 1, 3)$ y es paralela al vector $i + 4j - 2k$
- Encuentre otros dos puntos sobre la recta.

Solución: Aquí $r_0 = (5, 1, 3) = 5i + j + 3k$ y $v = i + 4j - 2k$, así que la ecuación vectorial sería:

$$r = (5i + j + 3k) + t(i + 4j - 2k) \text{ o bien } r = (5 + t)i + (1 + 4t)j + (3 - 2t)k$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$x = 5 + t$, $y = 1 + 4t$, $z = 3 - 2t$, como se puede apreciar en la siguiente figura 63.

- b) La elección del valor de parámetro $t = 1$, da $x = 6, y = 5, z = 1$, por lo tanto $(6,5,1)$ es un punto sobre la recta. De manera similar $t = -1$ da el punto $(4,-3,5)$.

La ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de una recta no son únicas. Si se cambia el punto o el parámetro, o se elige un vector paralelo diferente, entonces cambian las ecuaciones. Por ejemplo, si en lugar de $(5,1,3)$, se elige el punto $(6,5,1)$ en el ejemplo 1, entonces las ecuaciones paramétricas de la recta se convierten en:

$$x = 6 + t, \quad y = 5 + 4t, \quad z = 1 - 2t$$

O bien, si se permanece con el punto $(5, 1, 3)$ pero se elige un vector paralelo $2i + 8j - 4k$, entonces se llega a las ecuaciones

$$x = 5 + 2t, \quad y = 1 + 8t, \quad z = 3 - 4t$$

Cómo se puede apreciar en la figura 63.

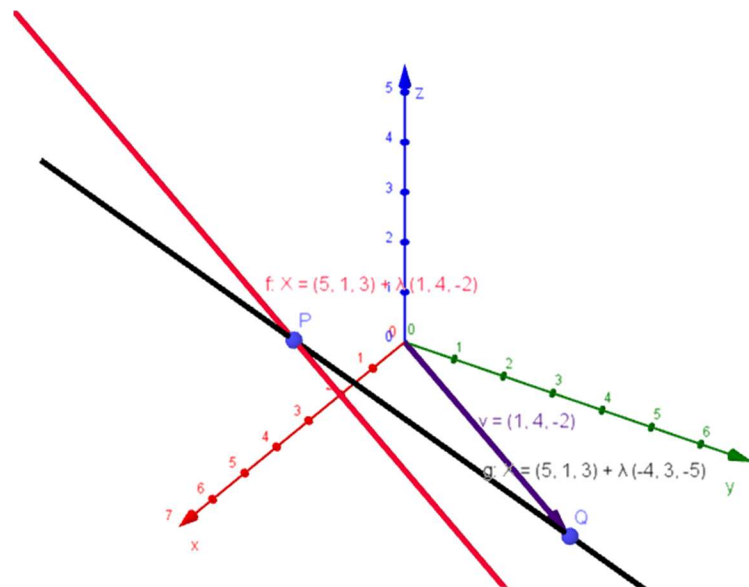


Figura 63. Ecuación vectorial

Ejemplo 2. Encuentra las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por el punto $P(-2,0,3)$ y es paralela a $\vec{v} = 2i + 4j - 2k$

Solución: Para obtener las ecuaciones paramétricas se plantea el paralelismo entre el vector $\vec{v}$ y el vector $\overrightarrow{P_0P}$: $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}$

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = t(a, b, c)$$

$$(x + 2, y - 0, z - 3) = t(2, 4, -2)$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = 2t - 2$$

$$y = 4t$$

$$z = -2t + 3$$

Y las ecuaciones simétricas son: $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{-2}$

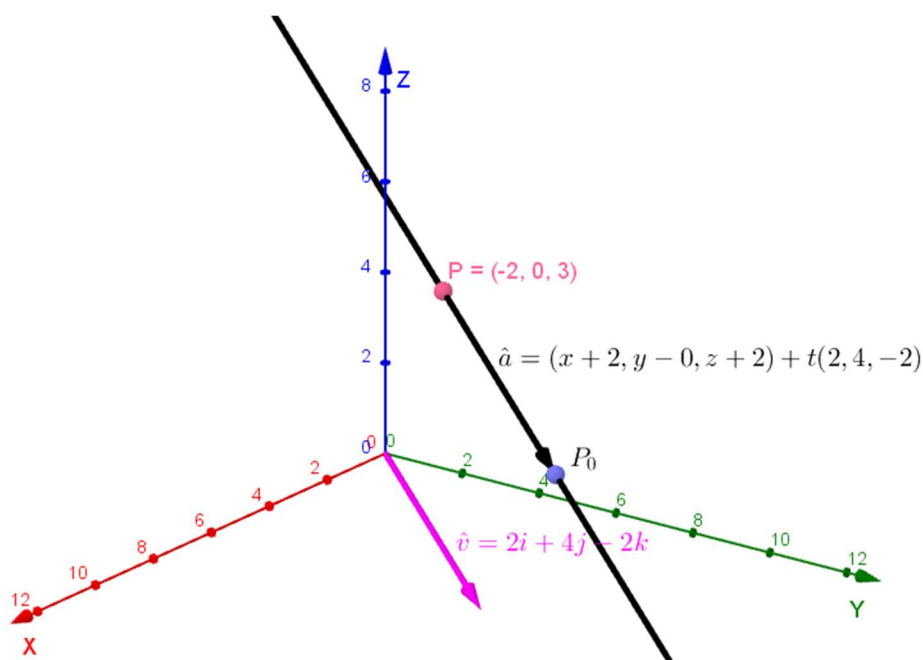


Figura 64. Representación ejemplo 2 en GeoGebra

Ejemplo 3: Encuentra las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por los puntos $P(5, -3, -2)$ y $P_0\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$.

Solución: Se construye el vector $\vec{v}$ (vector director) restando los valores de las coordenadas de los puntos de referencia:

$$\vec{v} = \left(-\frac{2}{3} - 5, \frac{2}{3} - (-3), 1 - (-2) \right) = \left(-\frac{17}{3}, \frac{11}{3}, 3 \right)$$

De este modo, las ecuaciones paramétricas se forman a partir de un punto y el vector director (posición) $\vec{v}$:

$$(x - 5, y + 3, z + 2) = t \left(-\frac{17}{3}, \frac{11}{3}, 3 \right)$$

Donde al despejar x, y, z se obtiene las ecuaciones paramétricas:

$$x = 5 - \frac{17}{3}t$$

$$y = -3 + \frac{11}{3}t$$

$$z = -2 + 3t$$

Por último, las ecuaciones simétricas de la recta son:

$$\frac{x - 5}{-\frac{17}{3}} = \frac{y + 3}{\frac{11}{3}} = \frac{z + 2}{3} \Rightarrow \frac{-3x + 15}{17} = \frac{3y + 9}{11} = \frac{z + 2}{3}$$

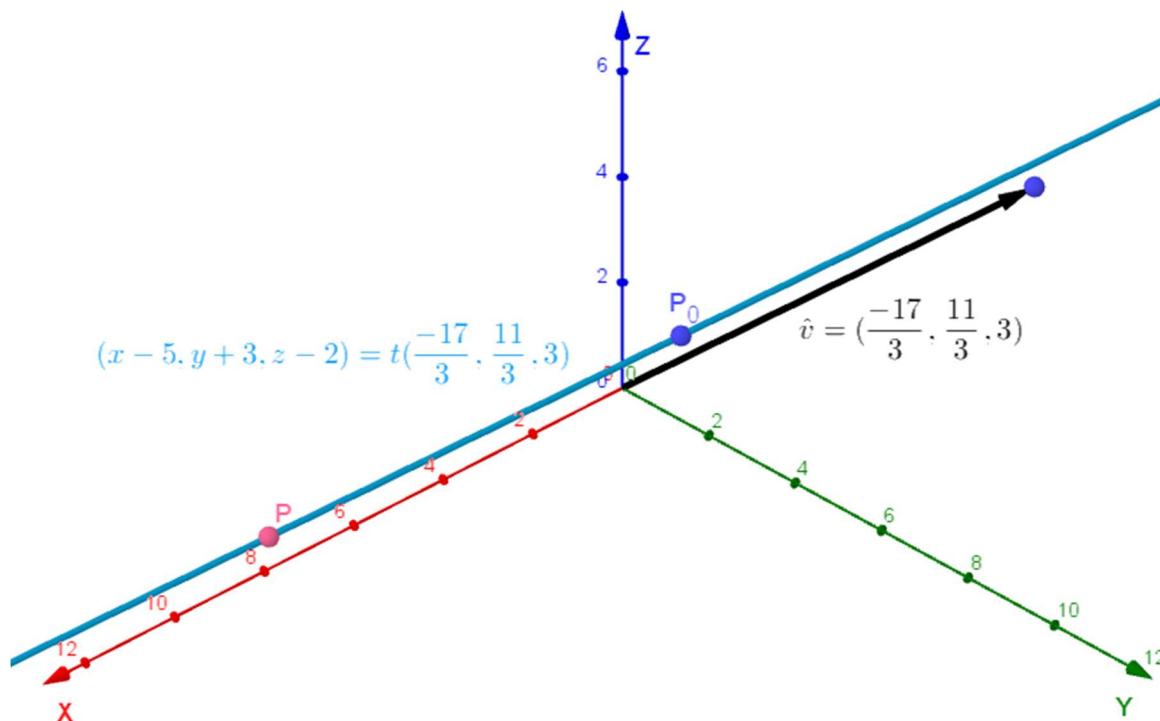


Figura 65. Representación ejemplo 3 en GeoGebra. Fuente: autoría propia.

Ejemplo 4. Encuentra la recta que pasa por el punto $P_0(1,0,1)$ y que es paralela a la recta cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = 3 + 3t, y = 5 - 2t, z = -7 + t$ ¿En qué punto corta al plano xy ?

Solución: de las ecuaciones paramétricas de la recta paralela se obtiene:

$$\vec{v} = 3i - 2j + k \Rightarrow \vec{v} = (3, -2, 1)$$

Así, las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(1,0,1)$ son:

$$(x - 1, y - 0, z - 1) = t(3, -2, 1)$$

$$x = 1 + 3t, \quad y = -2t, \quad z = 1 + t$$

Y sus ecuaciones simétricas son:

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y}{-2} = z - 1$$

Ahora que sabemos que este punto tiene las coordenadas $(x,y,0)$ podemos conocer también en qué punto corta al plano xy ; para ello, se sustituye en la ecuación paramétrica para z y se obtiene el valor de t .

$$1 + t = 0 \Rightarrow t = -1$$

Este valor se sustituye en las ecuaciones paramétricas para obtener el punto donde corta al plano xy :

$$x = 1 + 3t = 1 + 3(-1) = -2$$

$$y = -2t = -2(-1) = 2$$

$$z = 1 + t = 1 + (-1) = 0$$

Así, $P(-2,2,0)$ es el punto donde corta al plano xy .

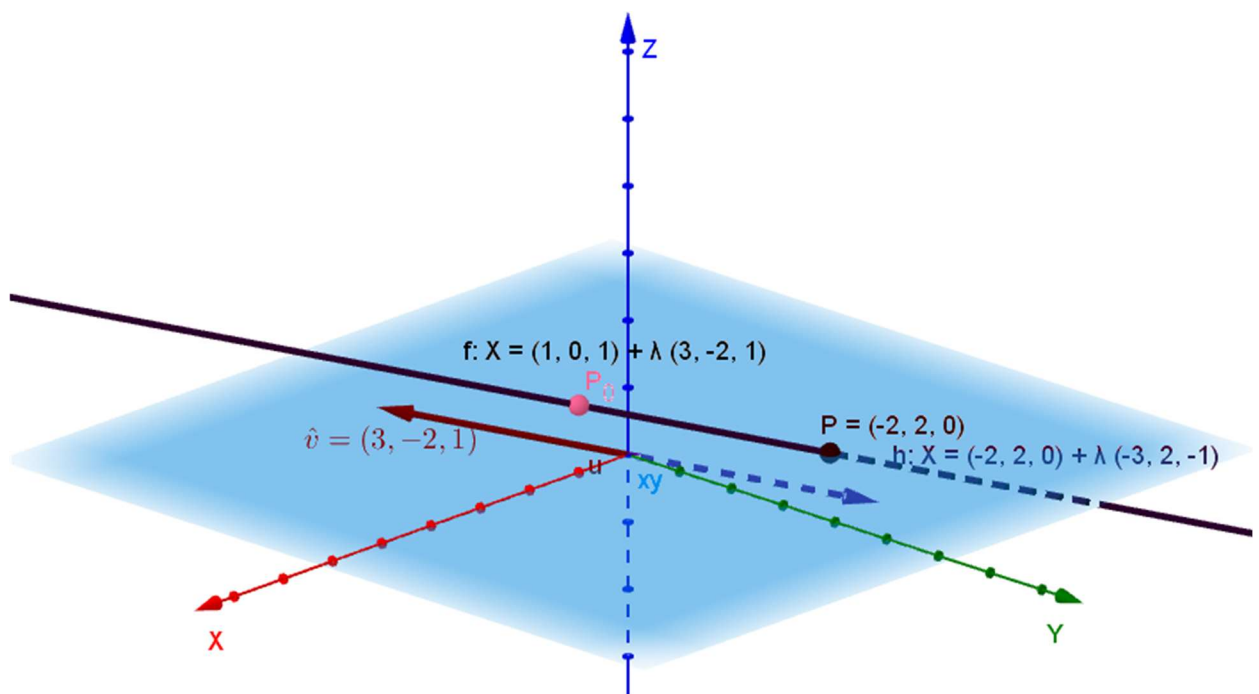


Figura 66. Punto (P) que corta al plano xy en GeoGebra.

Ejemplo 5. Demuestra que las rectas se intersectan y obtén el ángulo que forman:

$$L_1 \quad x = 4 + 2t \quad y = 3 - 2t \quad z = -7 - 4t$$

$$L_2 \quad x = s \quad y = 3 + 3s \quad z = 1 - 2s$$

Solución: sus vectores de dirección son:

$$\vec{V}_1 = (2, -2, -4)$$

$$\vec{V}_2 = (1, 3, -2)$$

Para encontrar el punto donde se cortan, se plantea un sistema de 2 ecuaciones lineales:

$$s = 4 + 2t$$

$$3 - 2t = 3 + 3s$$

La solución al sistema es:

$$t = -\frac{3}{2}; \quad s = 1$$

Y para el punto de intersección con L_1 se obtiene de:

$$x = 4 + 2 \frac{(-3)}{2} = 1$$

$$y = 3 - 2 \frac{(-3)}{2} = 6$$

$$z = -7 - 4 \frac{(-3)}{2} = -1$$

Por lo que el punto es **(1,6,-1)**.

El punto de intersección con L_2 se obtiene considerando que $s=1$:

$$x = 1;$$

$$y = 3 + 3(1) = 6;$$

$$z = 1 - 2s \Rightarrow z = 1 - 2(1) = -1$$

El punto es **(1,6,-1)**, como puede apreciarse, los puntos coinciden.

El ángulo que forman las rectas se obtiene con los vectores de dirección, cuyas magnitudes son:

$$|\vec{V}_1| = \sqrt{4 + 4 + 16} \approx 4.90$$

$$|\vec{V}_2| = \sqrt{1 + 9 + 4} \approx 3.47$$

Por la ecuación:

$$\cos\theta = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1||\vec{V}_2|} = \frac{2 - 6 + 8}{(4.90)(3.74)} = \frac{4}{18.33} \approx \mathbf{0.218}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1||\vec{V}_2|}\right) \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(0.218) \approx 77.40^\circ, \therefore \theta \approx \mathbf{77.40^\circ}$$

El resultado se puede apreciar en la figura 67.

En GeoGebra:

1. Escribir en la entrada $v1=(2,-2,-4)$ Enter
2. Escribir en la entrada $v2=(1,3,-2)$ Enter
3. Abrir Vista Cálculo simbólico (CAS) y escribir el sistema de ecuaciones:

$$s = 4 + 2t$$

$$3 - 2t = 3 + 3s$$

Para ello pasar del lado izquierdo todo lo que tenga variables y del lado derecho los términos independientes: $s-2t=4$ y $-2t-3s=0$, se escribe:

$$A: \{s-2t=4, -3s-2t=0 \text{ Enter}$$

4. Seleccionar la línea anterior y dar clic el ícono $x=$ y dar Enter, da los resultados $s=1$ y $t=-3/2$
5. En vista 2D insertar un deslizador llamado t , que va de -3 a 3 , con un incremento de 0.1
6. Escribir las ecuaciones paramétricas cuando $t=-3/2$ (-1.5) en L1 en la entrada (no en CAS):

$$x = 4 + 2t \quad y = 3 - 2t \quad z = -7 - 4t$$

NOTA: NO podemos utilizar x,y,z, por lo que haremos uso de tx,ty y tz, sustituyendo $t = -3/2(-1.5)$:

tx:=4+2*t Enter, da el resultado de 1

ty:=-2*t+3 Enter, da el resultado b=6

tz:=-4*t-7 Enter, da el resultado c=-1

esto equivale al punto(1,6,-1)

6. Escribir en la entrada (No en CAS) P=(tx,ty,tz) y enter
7. Dar clic en el ícono Perpendicular y seleccionar P y v1, Enter.
8. Para el ángulo, escribir en la entrada el comando Ángulo(v1,v2) Enter, da el resultado de 77.4 que se aproxima al que tenemos.
9. Ahora considerar cuando s=1, por lo que se debe insertar un deslizador llamado s, que va de -3 a 3 con un incremento de 0.1 Enter.
10. Escribir las ecuaciones paramétricas cuando s=1 en L2 en la entrada(no en CAS):

$$L_2 \quad x = s \quad y = 3 + 3s \quad z = 1 - 2s$$

NOTA: NO podemos utilizar x,y,z, por lo que haremos uso de sx,sy y sz, cuando s=1:

sx:=s Enter, da el resultado de 1

sy:=3*s+3 Enter, da el resultado b=6

sz:=-2*s+1 Enter, da el resultado c=-1

esto equivale al punto(1,6,-1).

11. Escribir en la entrada (No en CAS) Q=(sx,sy,sz) y enter
12. Dar clic en el ícono Perpendicular y seleccionar Q y v2, Enter.
11. En la figura siguiente se observan las 2 rectas paralelas a los 2 vectores de dirección:

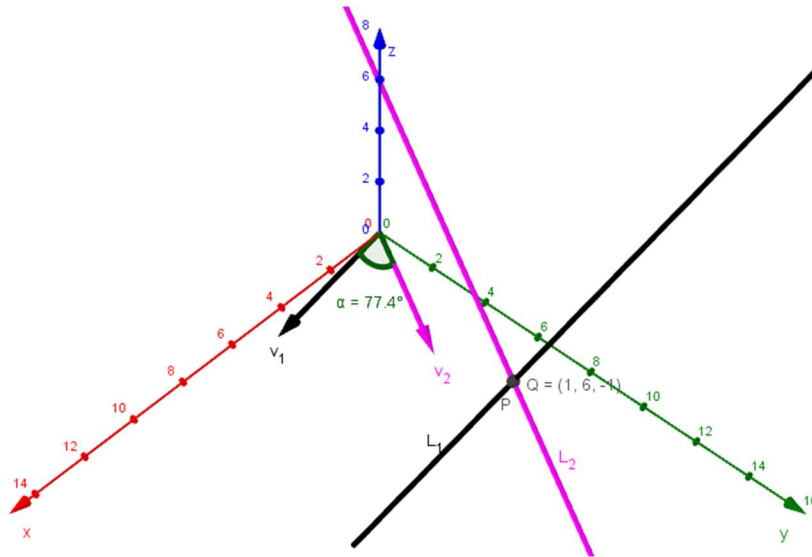


Figura 67. Intersección GeoGebra. Fuente Autoría propia.

1.5 Ecuación del plano

Para obtener la ecuación general de un plano en el espacio se puede determinar a partir de un **punto del plano** y del **vector normal (perpendicular)** a él, considera el plano que contiene el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y que tiene por vector normal no nulo $\vec{n} = (a, b, c)$.

El plano de la figura 9 contiene los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_1, y_1, z_1)$ para los cuales el vector $\overrightarrow{PQ}$ es ortogonal a $\vec{n}$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

$$(a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$

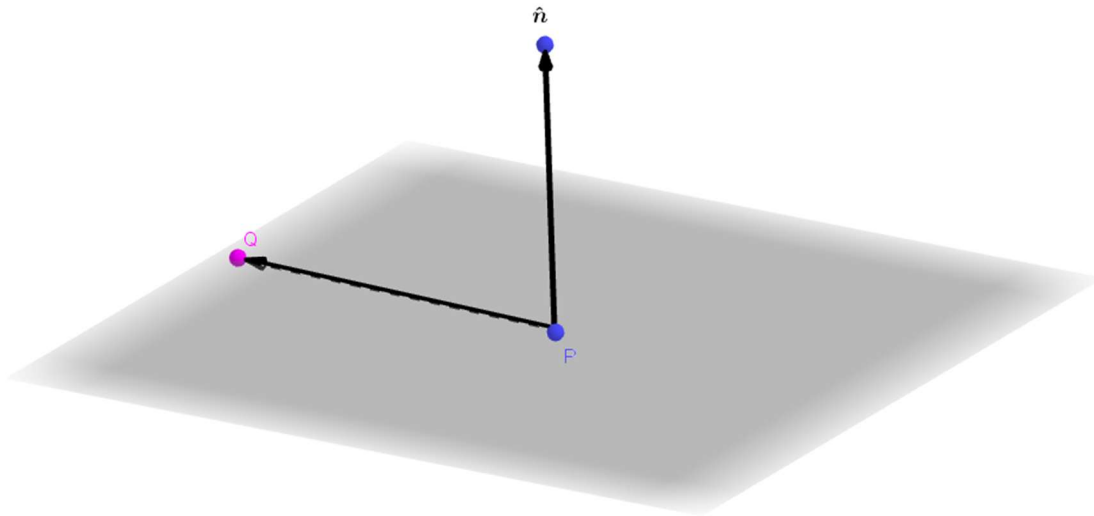


Figura 68. Representación de un plano en el espacio.

La forma canónica de la **ecuación de un plano** (ecuación escalar del plano que pasa por $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y el vector normal $\vec{n} = (a, b, c)$) es:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

Ejemplo 6. Obtén la ecuación general de un plano que contenga los puntos $(2, 1, 1)$, $(0, 4, 1)$ y $(-2, 1, 4)$:

Solución:

Para obtener la ecuación de un plano se necesita un punto en el plano y un vector normal al plano.

Se construyen 2 vectores con los puntos en el plano $A(2, 1, 1)$, $B(0, 4, 1)$ y $C(-2, 1, 4)$:

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 3, 0), \text{ se resta } B-A$$

$$\overrightarrow{AC} = (-4, 0, 3), \text{ se resta } C-A$$

Se genera un vector normal a ellos, multiplicándose en producto cruz.

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9\hat{i} + 6\hat{j} + 12\hat{k}$$

Se utiliza el punto $P=(2,1,1)$ y el vector normal $\vec{n}(9,6,12)$. para construir la ecuación del plano:

$$(9,6,12) \cdot (x-2, y-1, z-1) = 0$$

$$9(x-2) + 6(y-1) + 12(z-1) = 0$$

$9x + 6y + 12z = 36$, simplificando se obtiene:

$$3x + 2y + 4z = 12$$

Dos planos del espacio tridimensional, o bien son paralelos, o bien se cortan en una recta. Si se cortan es posible determinar el ángulo entre ellos a partir del ángulo que forman sus vectores normales.

Entonces, el ángulo entre ellos se calcula mediante la ecuación siguiente:

$$\cos\theta = \left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \right)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \right). \text{ Nota: } \overrightarrow{AB} = \vec{n}_1 \text{ y } \overrightarrow{AC} = \vec{n}_2, \text{ por lo tanto:}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{8 + 0 + 0}{|\sqrt{13}| |5|} \right) \Rightarrow \theta \approx 63.65^\circ$$

Como se puede apreciar en la figura 69.

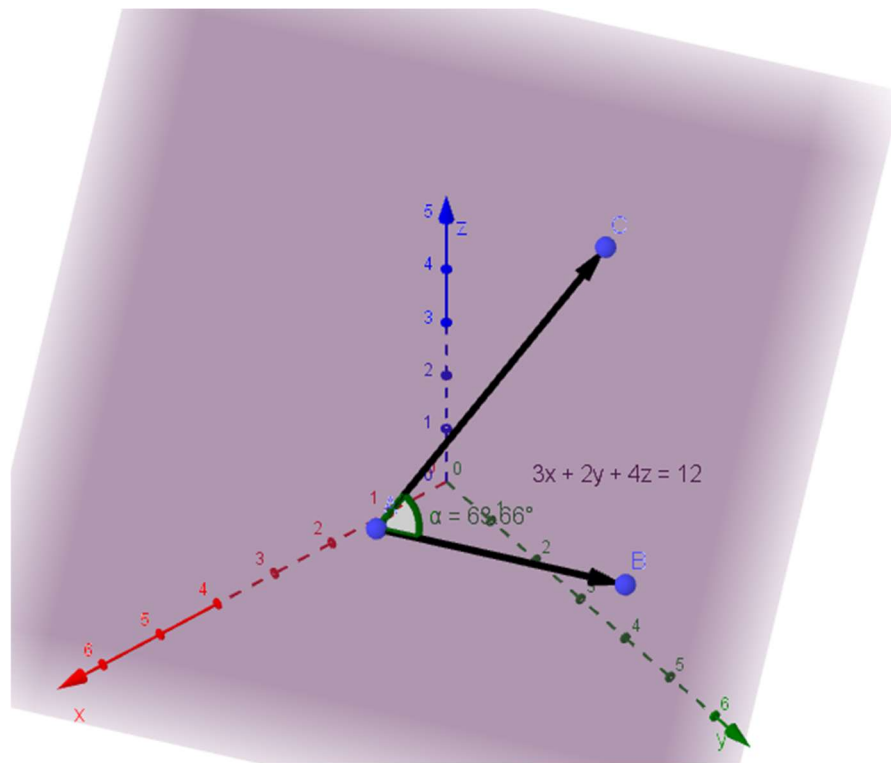


Figura 69. Representación ejemplo 6 en GeoGebra. Fuente autoría propia.

Ejemplo 7. Encuentra la ecuación de la recta donde se cortan los planos y el ángulo que forman: $x - 2y + z = 0$, $y - 2x + 3y - 2z = 0$.

Solución:

Para encontrar la solución de una recta es necesario conocer la ubicación de un punto sobre la misma y un vector paralelo a ella. De este modo, analizamos las ecuaciones de los planos y observamos que están igualadas a cero; esto indica que los planos pasan por el origen. Por lo tanto, un punto sobre la recta es $P(0,0,0)$.

Para encontrar el vector paralelo a la recta, se emplean los vectores normales a los planos:

$$\vec{n}_1 = (1, -2, 1)$$

$$\vec{n}_2 = (2, 3, -2)$$

Con las magnitudes

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\vec{n}_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}$$

Si se multiplican n_1 y n_2 en producto cruz, se obtendrá un **vector normal** a ambos que determina la dirección de la recta de corte:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (4 - 3)\hat{i} - (-2 - 2)\hat{j} + (3 + 4)\hat{k} = \hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$$

Por lo que, si se toma el punto $P(0,0,0)$ como un punto que pertenece a la recta de corte, las ecuaciones paramétricas de esa recta son:

$$x = t, \quad y = 4t, \quad z = 7t, \quad \text{y las simétricas: } x = \frac{y}{4} = \frac{z}{7}$$

Mientras que el ángulo que forman los planos es:

$$\cos\theta = \left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \right)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{(1, -2, 1) \cdot (2, 3, -2)}{|\sqrt{6}||\sqrt{17}|} \right) \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(-\frac{2 - 6 - 2}{\sqrt{102}} \right)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(-\frac{6}{\sqrt{102}} \right) \Rightarrow \theta = 126.44^\circ$$

Tal como se aprecia en la figura 70:

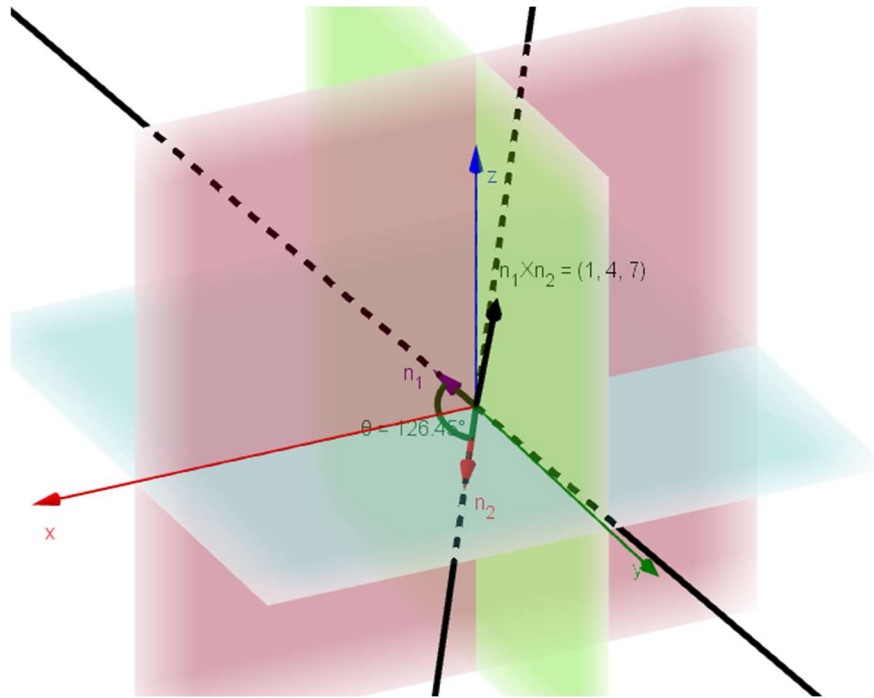


Figura 70. Representación ejemplo 7. Fuente: autoría propia.

Si un plano en el espacio corta uno de los planos coordenados, llamamos a la recta de corte traza del plano dado en el plano coordenado. Es útil hallar sus puntos de corte con los ejes de coordenadas y sus trazas en los planos coordenados.

Ejemplo 8. Ubica el siguiente plano en un sistema de coordenadas: $3x + 2y + 4z = 12$.

Solución:

Se encuentra la traza xy, suponiendo que $z=0$

$$3x + 2y = 12$$

$$\text{Para } x = 0, y = 6$$

$$\text{Para } y = 0, x = 4$$

Esta recta corta los ejes en los puntos $(4,0,0)$ y $(0,6,0)$.

Se encuentra la traza yz suponiendo que $x=0$

$$2y + 4z = 12$$

Para $y = 0, z = 3$

Para $z = 0, y = 0$

Esta recta corta los ejes en los puntos $(0,6,0)$ y $(0,0,3)$.

Encontramos la traza xz, suponiendo que $y=0$

$$3x + 4z = 12$$

Para $x = 0, z = 3$

Para $z = 0, x = 4$

Esta recta corta los ejes en los puntos $(0,0,3)$ y $(4,0,0)$.

La ubicación del plano en el sistema de coordenadas cartesianas resulta ser finalmente como se muestra en la figura 71.

Si en la ecuación del plano falta una variable entonces el plano es paralelo al eje representado por la variable que falta.

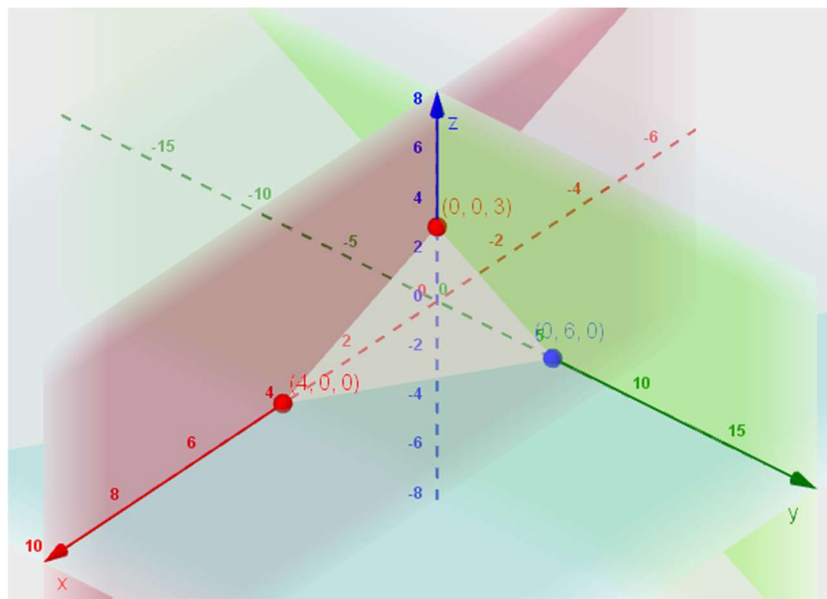


Figura 71. Graficación de un plano en el espacio.

Ejemplo 9. Encuentra la ecuación del plano que pasa por el punto $P(3,2,2)$ y es perpendicular a la recta dada por: $\frac{x-1}{4} = y + 2 = \frac{z+3}{-3}$

Solución:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{-3}$$

De los denominadores de las ecuaciones simétricas de la recta se obtiene el vector de dirección de la recta $\vec{v} = (4,1,-3)$ y el punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ de los numeradores con signo contrario. $Q(x_0, y_0, z_0) = (1, -2, -3)$

El plano a obtener se representa mediante el diagrama de la figura 72.

La ecuación del plano se obtiene mediante el producto punto con el punto $P(3,2,2)$.

$$(a, b, c) \cdot (x - x_1), (y - y_1), (z - z_1) = 0$$

$$(4, 1, -3) \cdot (x - 3), (y - 2), (z - 2) = 0$$

$$4x - 12, y - 2, -3z + 6 = 0$$

$$4x + y - 3z = 8$$

O de la ecuación ordinaria, tomando como base el punto $P(3,2,2)$ y el vector director $(a,b,c)=(4,1,-3)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$4(x - 3) + 1(y - 2) + (-3)(z - 2) = 0$$

$$4x - 12 + y - 2 - 3z + 6 = 0$$

$$4x + y - 3z = 8$$

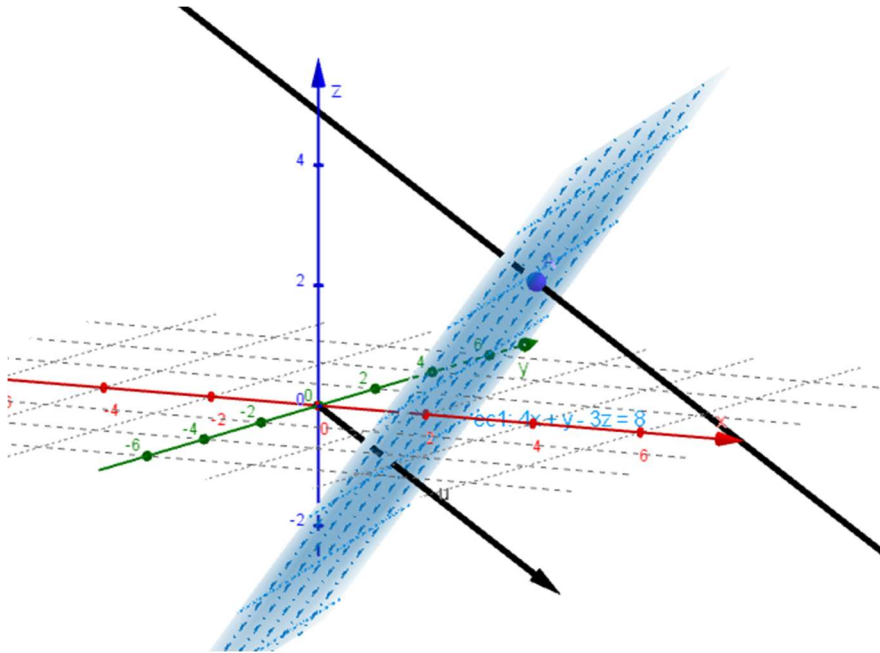


Figura 72. Ecuación de la recta en el plano.

Ejemplo 10. Encuentra la ecuación del plano que contiene las rectas:

$$L_1 = \frac{x-1}{-2} = y-4 = z, y \quad L_2 = \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$$

Solución:

$$L_1 = \frac{x-1}{-2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-0}{1}, y \quad L_2 = \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$$

Los vectores de dirección de las rectas son de acuerdo con los denominadores de las ecuaciones simétricas y los puntos A y B de los numeradores con signo contrario de cada recta:

$$\vec{v}_1 = (-2, 1, 1) = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \quad \text{y el punto } A(1, 4, 0)$$

$$\vec{v}_2 = (-3, 4, -1) = -3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k} \quad \text{y el punto } B(2, 1, 2)$$

Puesto que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ están en el mismo plano, se construye un vector normal (perpendicular) a ambos:

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-1-4)\hat{i} - (2+3)\hat{j} + (-8+3)\hat{k} = -5\hat{i} - 5\hat{j} - 5\hat{k}$$

Si se utiliza el punto $(2,1,2)$ de la recta L_2 , se obtiene la ecuación del plano.

$$(x-2, y-1, z-2) \cdot (-5, -5, -5) = 0$$

$$-5x + 10 - 5y + 5 - 5z + 10 = 0$$

$$x + y + z = 5$$

Tal como se aprecia en la figura 73.

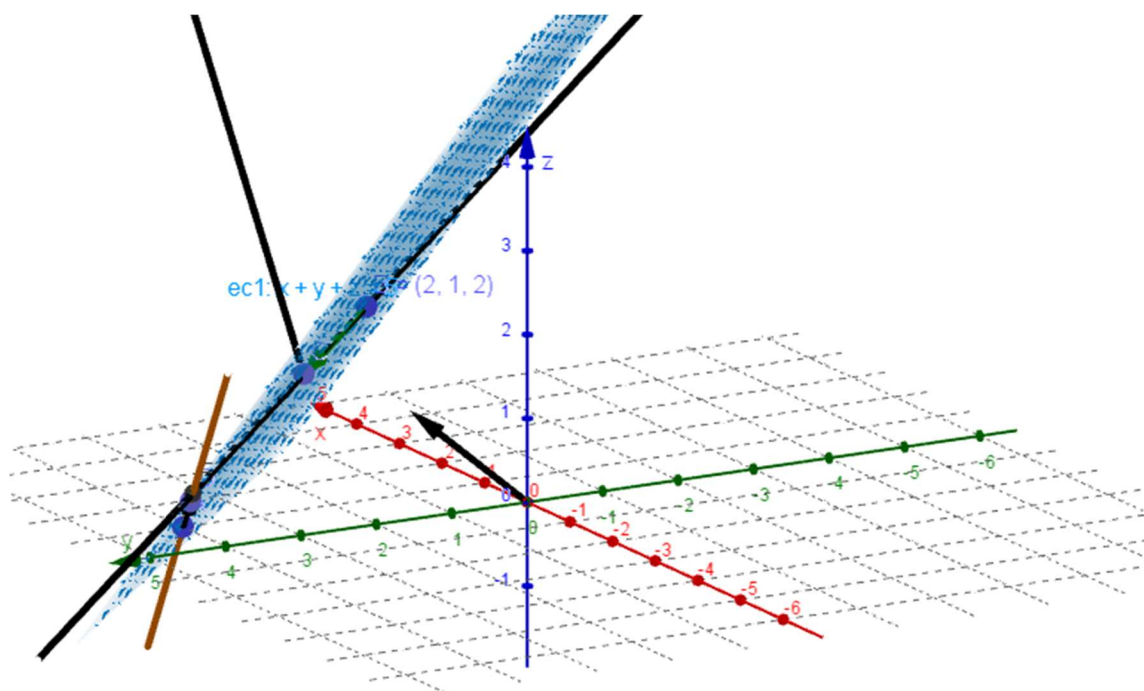


Figura 73. Ecuación del plano que contiene 2 rectas. Fuente: autoría propia

Ejemplo 11. Encuentra la ecuación del plano que pasa por los puntos $P(2,2,1)$ y $Q(-1,1,-1)$ y es perpendicular al plano $2x - 3y + z = 3$.

Solución:

Con los 2 puntos se obtiene un vector $\overrightarrow{PQ}$ en el plano.

$$\overrightarrow{PQ} = (3, 1, 2)$$

El plano $2x - 3y + z = 3$, tiene como vector normal $\overrightarrow{n_1} = (2, -3, 1)$. La figura 15 representa los planos con los que se trabaja.

Con $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{n_1}$ se construye un vector $\overrightarrow{n_2}$ perpendicular a ambos.

$$\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-6 - 1)\hat{i} - (4 - 3)\hat{j} + (2 + 9)\hat{k} = -7\hat{i} - \hat{j} + 11\hat{k}$$

Como se observa en el diagrama, $\overrightarrow{n_2}$ es perpendicular al plano que contiene a $\overrightarrow{PQ}$, entonces con Q y $\overrightarrow{n_2}$ se obtiene la ecuación del plano (véase figura 74):

$$\overrightarrow{n_2} = (-7, -1, 11) \text{ y } Q(-1, 1, -1)$$

$$(a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$

$$(-7, -1, 11) \cdot (x + 1, y - 1, z + 1) = 0$$

$$-7x - 7 - y + 1 + 11z + 11 = 0$$

$$7x + y - 11z = 5$$

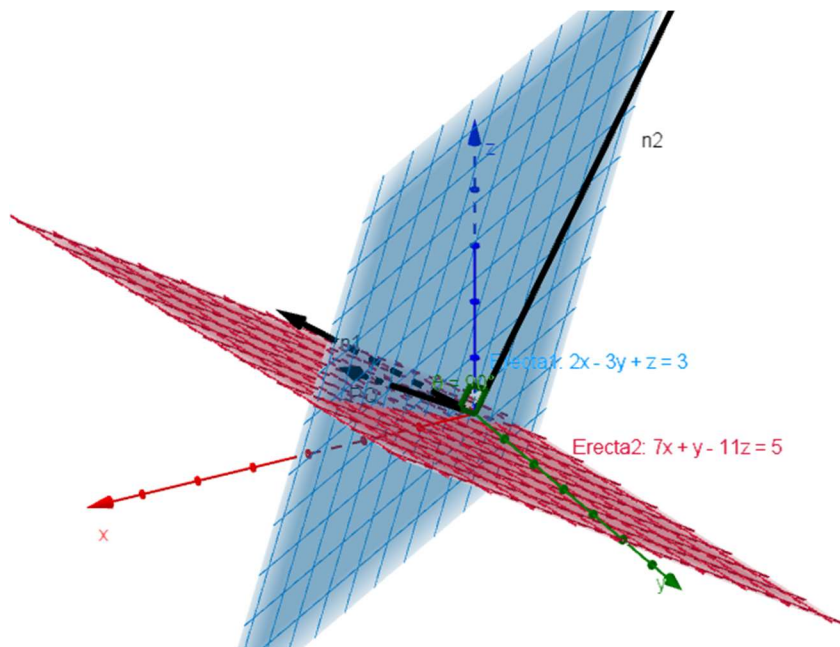


Figura 74. Representación ejemplo 11. Fuente: autoría propia.

1.6 Aplicaciones

El producto escalar se puede utilizar para calcular fuerza, mientras que el producto vectorial se utiliza para calcular momentos de fuerza, y el triple producto de vectores para volumen de paralelepípedos y momentos de una fuerza con respecto a un eje.

Par de torsión

La idea de un producto cruz ocurre con frecuencia en física. En particular, se considera una fuerza F que actúa sobre un cuerpo rígido en un punto dado por un vector de posición r . (Por ejemplo se aprieta un perno aplicando una fuerza a una llave como en la figura 75, se produce un efecto de giro). El par de torsión τ (**relativo al origen**) se define como el producto cruz de los vectores de posición y fuerza

$$\tau = r \times F$$

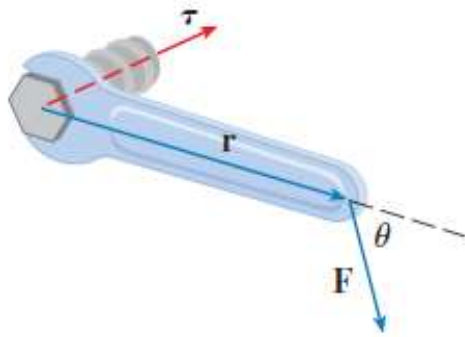


Figura 75. Par de torsión

y mide la tendencia del cuerpo a girar respecto al origen. La dirección del par de torsión indica el eje de rotación. De acuerdo con el teorema $|a \times b| = |a||b|\sin \phi$, la magnitud del vector de par de torques es

$$|\tau| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin \phi$$

Donde ϕ es el ángulo entre los vectores de posición y fuerza. Observe que la única componente de F que puede causar rotación es la que es perpendicular a r , es decir, $|F|\sin \theta$. La magnitud del par de torsión es igual al área del paralelogramo determinado por r y F .

Problema 1. Se aprieta un perno aplicando una fuerza de 40 N a una llave de 0.25 m como se muestra en la figura 76. Encuentre la magnitud del par de torques respecto al centro del perno.

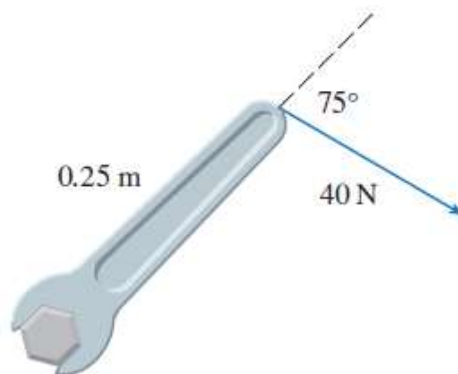


Figura 76. Par de torsión para problema 1

La magnitud del vector del par de torques es:

$$\begin{aligned} |\tau| &= |r \times F| = |r||F|\sin 75^\circ = (0.25)(40)\sin 75^\circ \\ &= 10 \sin 75^\circ \approx 9.66 \text{ N.m} \end{aligned}$$

Si el perno tiene cuerda derecha, entonces el vector de par de torques es

$$\tau = |\tau|n \approx 9.66n$$

Donde n es un vector unitario con dirección hacia la página.

Momento de una fuerza con respecto a un punto en el espacio.

La determinación del momento de una fuerza en el espacio se simplifica en forma considerable si el vector de fuerza y el vector de posición a partir de su punto de aplicación se descomponen en sus componentes rectangulares x , y y z .

El momento M_B de una fuerza F aplicada en A con respecto a un punto arbitrario B , se

obtiene mediante $M_B = r \times F \Rightarrow M_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

r : Vector de posición trazado desde B hasta cualquier punto que se encuentre sobre la línea de acción de F .

F : Fuerza

r_x, r_y, r_z : Componentes x , y , z del vector de posición trazado desde el punto B hasta cualquier punto sobre la línea de acción de la fuerza.

F_x, F_y, F_z : Componentes x , y , z del vector fuerza F .

Problema 2.

Una placa rectangular está apoyada por ménsulas en A y B y por un alambre CD . Se sabe que la tensión en el alambre es de 200 N, determine el momento con respecto A de la fuerza ejercida por el alambre en el punto C (véase figura 77).

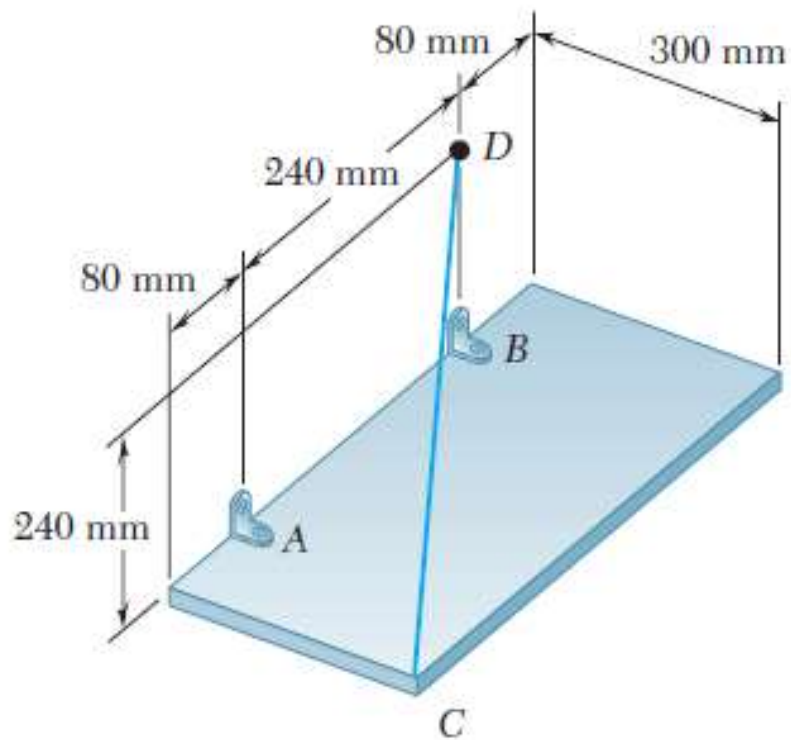


Figura 77. Representación problema

Solución: El momento M_A de la fuerza ejercida por el alambre en el punto C con respecto a A, se obtiene a partir del producto vectorial:

$$M_A = r_{C/A} \times F$$

Donde $r_{C/A}$ es el vector trazado desde A hasta C:

$$r_{C/A} = \overrightarrow{AC} = (0.3, 0, 0.4) - (0, 0, 0.32)$$

$$r_{C/A} = \overrightarrow{AC} = (0.3)i + (0.08)k$$

F es la fuerza de 200 N dirigida a lo largo de CD, al introducir el vector unitario $\lambda = \frac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}$, se escribe:

$$F = F\lambda = (200N) \frac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}$$

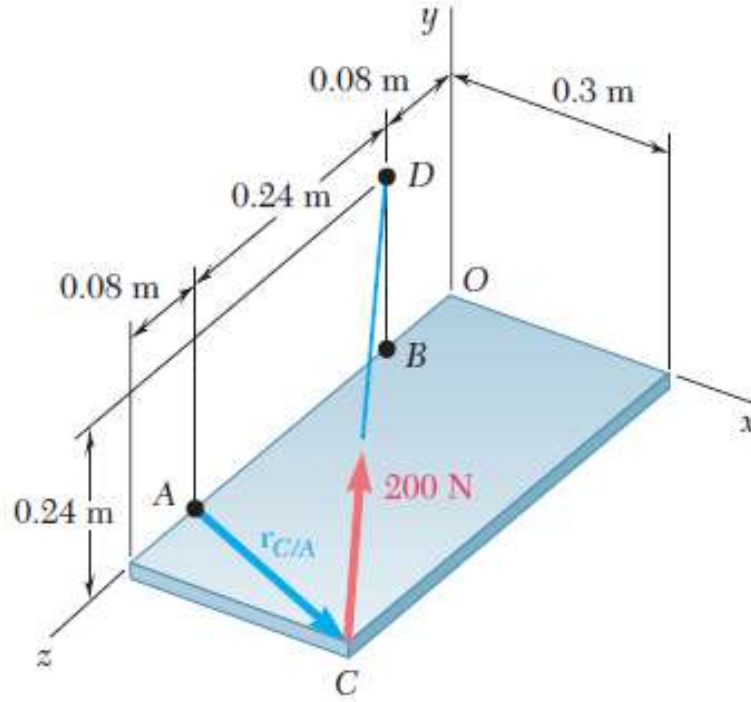


Figura 78. Descomposición en vectores.

$$F = F\lambda = (200N) \frac{\overrightarrow{CD}}{|CD|}$$

Al descomponer al vector $\overrightarrow{CD}$ en sus componentes rectangulares, se tiene:

$$\overrightarrow{CD} = (0, 0.24, 0.08) - (0.3, 0, 0.4)$$

$$\overrightarrow{CD} = -(0.3m)i + (0.24m)j - (0.32m)k$$

$$CD = \sqrt{(-0.3)^2 + (0.24)^2 + (-0.32)^2} = 0.5m$$

Si se sustituye este resultado en $F = F\lambda = (200N) \frac{\overrightarrow{CD}}{CD}$

$$\begin{aligned} F = F\lambda &= \frac{(200N)}{0.5m} [-(0.3m)i + (0.24m)j - (0.32m)k] \\ &= -(120N)i + (96N)j - (128N)k \end{aligned}$$

Sustituyendo $r_{C/A}$ y F en $M_A = r_{C/A} \times F$ se obtiene:

$$M_A = r_{C/A} \mathbf{x} F = (0.3\mathbf{i} + 0.08\mathbf{k}) \mathbf{x} (-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} - 128\mathbf{k})$$

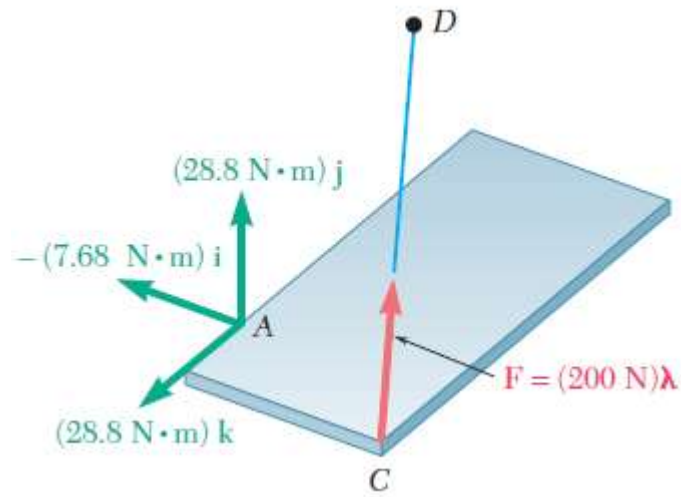


Figura 79. Descomposición vectorial

Solución 1:

$$\vec{P} \mathbf{x} \vec{Q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{vmatrix}$$

$$= (P_2Q_3 - P_3Q_2)\mathbf{i} - (P_1Q_3 - P_3Q_1)\mathbf{j} + (P_1Q_2 - P_2Q_1)\mathbf{k}$$

$$M_A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{C/A} & y_{C/A} & z_{C/A} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$$

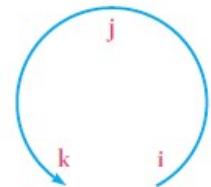
$$\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$



$$M_A = r_{C/A} \mathbf{x} F = (0.3\mathbf{i} + 0.08\mathbf{k}) \mathbf{x} (-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} - 128\mathbf{k})$$

$$\begin{aligned}
 &= (0.30)(96)k + (0.3)(-128)(-j) + (0.08)(-120)j + (0.08)(96)(-i) \\
 &= (28.8 \text{ N.m})k + (38.4 \text{ N.m})j - (9.6 \text{ N.m})j - (7.68 \text{ N.m})i \\
 \mathbf{M}_A &= -(7.68 \text{ N.m})i + (28.8 \text{ N.m})j + (28.8 \text{ N.m})k
 \end{aligned}$$

Solución 2: También puede calcularse

M_A en forma de determinante:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_A &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ 0.3 & 0 & 0.08 & 0.3 & 0 \\ -120 & 96 & -128 & -120 & 96 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_A &= (0)(-128)i + (0.08)(-120)j + (0.3)(96)k - (-120)(0)k \\
 &\quad - (96)(0.08)i - (-128)(0.3)j \\
 &= 0 + (-9.6)j + (28.8)k - 0 - 7.68i + 38.4j \\
 \mathbf{M}_A &= -(7.68 \text{ N.m})i + (28.8 \text{ N.m})j + (28.8 \text{ N.m})k
 \end{aligned}$$

Nota: El documento completo lo podrá consultar y descargar como **R 1.5 Antología Ecuación de la recta y ecuación del plano.pdf**, en el siguiente enlace: <https://drive.google.com/file/d/12pqkGJcllKhPXcHunKZsNgjs4T0kWMr/view?usp=sharing>

Capítulo 4. Propuesta didáctica

En este capítulo se presenta la propuesta de este trabajo, que abarca las fases del modelo ADDIE complementada con el estándar 366 de CONOCER y los resultados de aprendizaje que sugiere Pozo (2013).

Análisis: De acuerdo con el modelo educativo del TECNM (2015) para la educación a distancia, ya se realizó el análisis en el capítulo I sobre: contenido de la materia de Cálculo vectorial, competencias y ubicación del plan de estudios, así como las características de los estudiantes, en donde se sugiere la modalidad mixta. También ya se revisó las teorías del aprendizaje que sustentan esta propuesta.

Para este trabajo se pretende aproximar al aprendizaje verbal en los niveles de: información verbal, conceptos y cambios conceptuales (véase figura 80), y el aprendizaje procedimental en los niveles de: Técnicas, estrategias y estrategias de aprendizaje (véase figura 81) para determinar posteriormente el diseño instruccional que sugiere Pozo (2013):

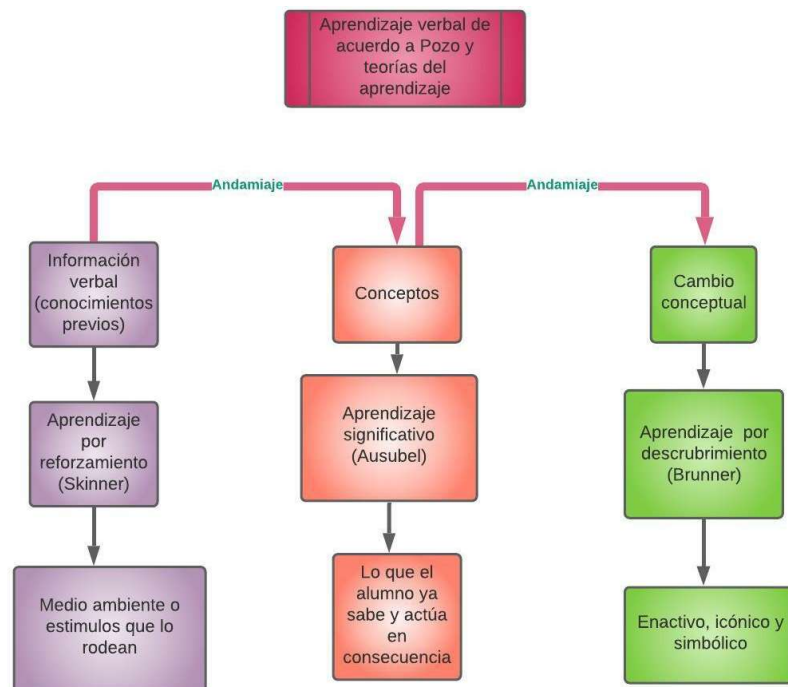


Figura 80. Aprendizaje verbal y teorías del aprendizaje

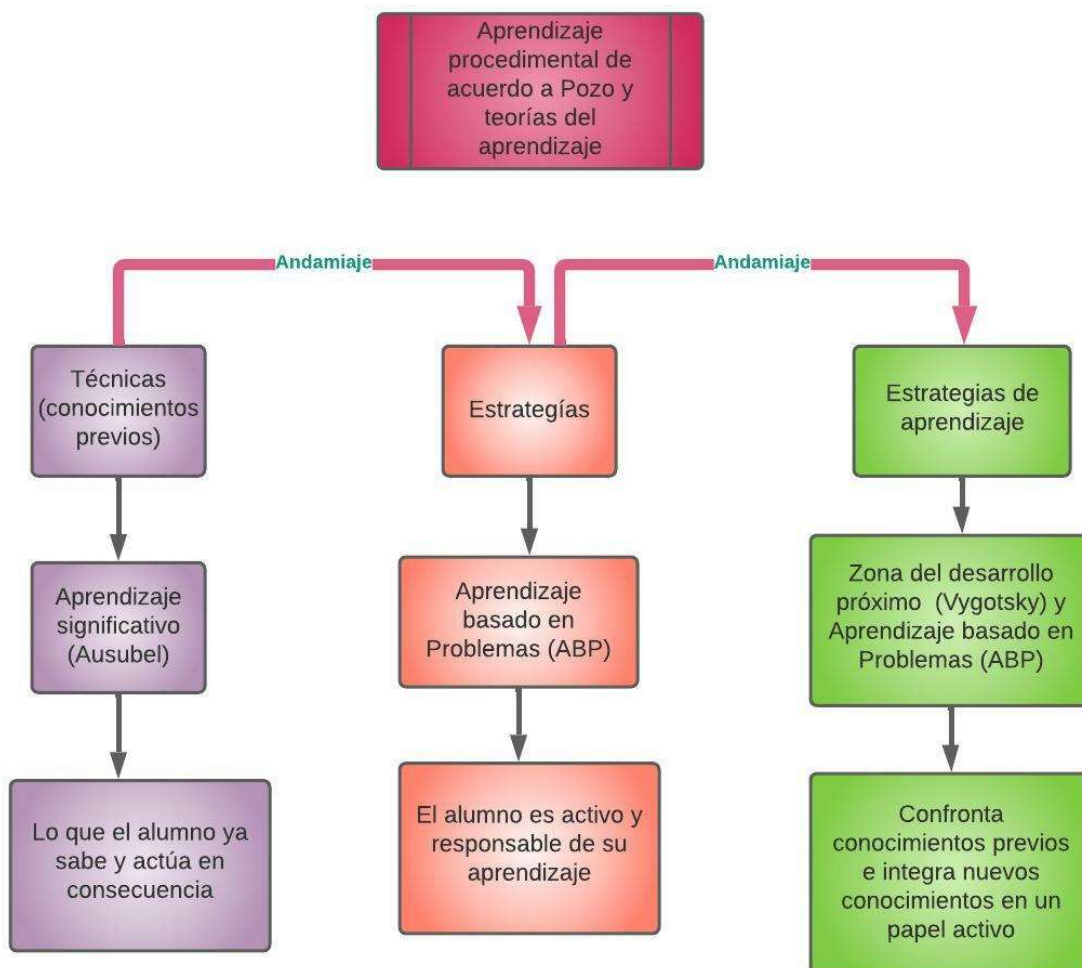


Figura 81. Aprendizaje procedimental y teorías del aprendizaje

El aprendizaje verbal y procedimental que sugiere Pozo (2013) para la unidad 1 de Cálculo Vectorial, de acuerdo con el análisis quedaría de la siguiente forma (ver figura 82), el cual servirá de base para la siguiente fase.

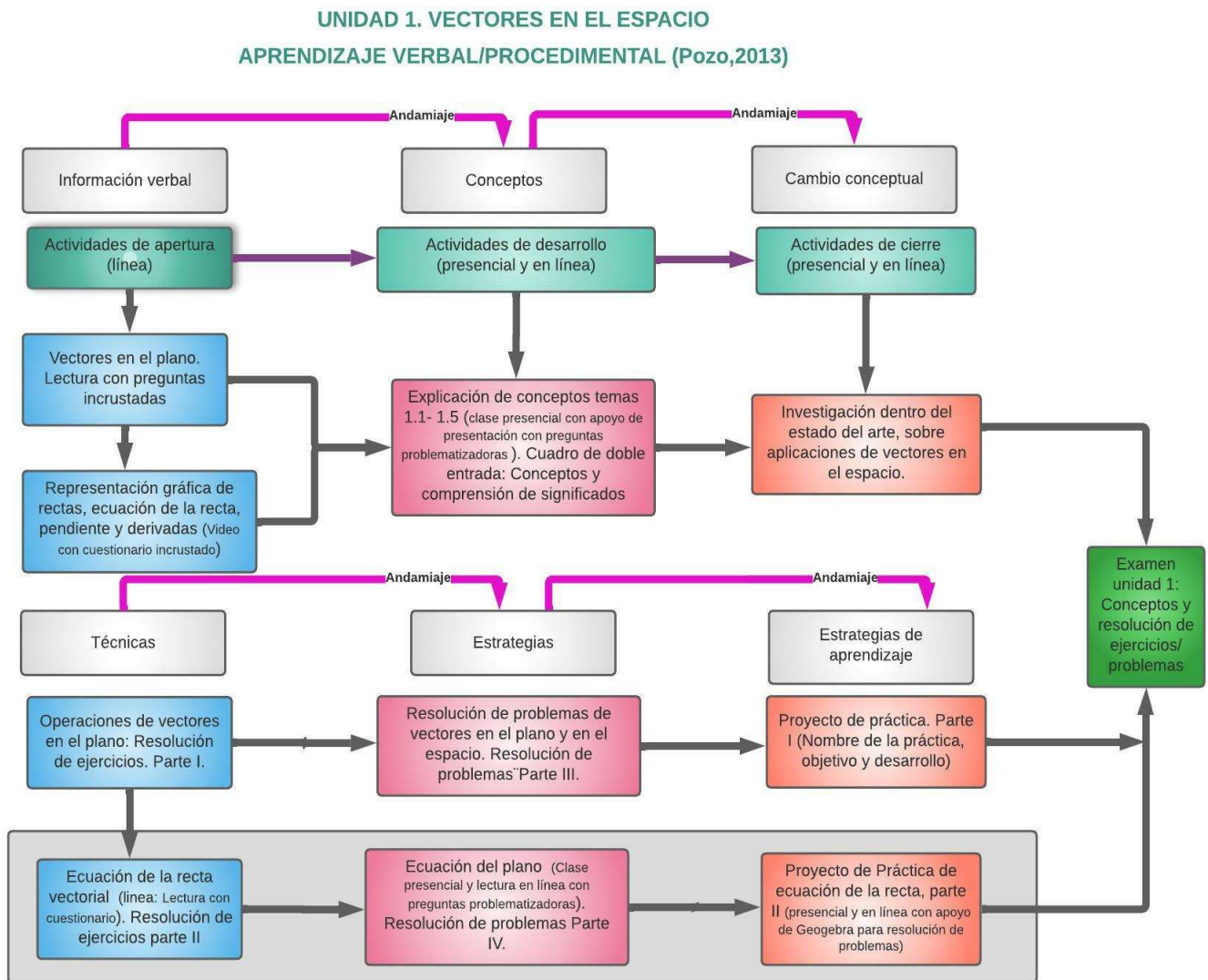


Figura 82. Aprendizaje verbal/procedimental unidad 1 de Cálculo Vectorial

Diseño: En la siguiente fase del modelo ADDIE y considerando la información que se genera en el análisis, se clasifica y dosifica de acuerdo con el programa de estudios de Cálculo Vectorial para la unidad 1, y complementando con el estándar 366 da como resultado el **cronograma o guía** (instrumentación) didáctica y el **documento de información general del curso**. En el ITSAT se trabaja en pares académicos, en donde se definen las estrategias de enseñanza y aprendizaje, así como los instrumentos de evaluación con los que se calificará las evidencias de aprendizaje, pero también se especifica los medios tecnológicos para apoyar el aprendizaje, todos esos elementos se encuentran dentro de la guía (instrumentación) didáctica o cronograma (ver fragmento en

figura 83 y de forma completa en el **anexo A**) que establecen tanto TECNМ en el modelo ADDIE para la educación en línea como el estándar 366 de CONOCER y que se puede

15. Tema y competencia específica	16. Subtema	17. Actividades del docente	18. Actividad (es) de aprendizaje	19. Técnica didáctica	20. Apoyo didáctico (Recursos)	21. Herramienta en plataforma	22. Horas		23. Momento de evaluación (ED, EF, ES)
							Teóricas	Prácticas	
I. Vectores en el espacio. Conoce y desarrolla las propiedades de las operaciones con vectores para resolver problemas de	1.1 Definición de un vector en el plano y en el espacio y su interpretación geométrica. 1.2 Álgebra vectorial y su geometría.	1. Elabora presentación sobre vectores y sus operaciones en el plano, para proporcionar como recurso en línea (R 1.1.) con preguntas incrustadas y ejercicios en la actividad de apertura A A.1.1.	Actividad previa/apertura 1: Revisar lectura R.1.1 Vectores y sus operaciones en el plano, y responder las preguntas/ejercicios (A A.1.1).	Lectura con preguntas detonadoras y resolución de ejercicios.	Lecturas en plataforma: R.1.1 Vectores y sus operaciones en el plano.	Cuestionario A. A.1.1 vectores en el plano.	2	1	EF1

Figura 83. Diseño de la guía/ instrumentación didáctica de Cálculo Vectorial. Unidad 1
 descargar del siguiente link:

<https://drive.google.com/file/d/1BRFtnVHj33F5kFireanR2olZ3KsqQbiB/view?usp=sharing>

En conclusión, en esta fase del modelo ADDIE se complementa con el elemento 1 de 3 del estándar 366 de CONOCER (se agrega como recurso ECO366), que sugiere lo siguiente:

Elemento 1 de 3. Planificar el desarrollo del curso de formación en línea. Los productos que se obtienen son (tomado de (CONOCER, 2013)):

- ☐ El **cronograma** para el desarrollo del curso en línea elaborado. El cual equivale a la guía didáctica ya realizado (**Anexo A**).
- ☐ El documento de información general del curso en línea. El cual se agrega en anexos (**Anexo B**) y que se encuentra en el siguiente enlace:
<https://drive.google.com/file/d/1EbrZF4-474etaR2cUDN0XmEB9RwK-lxa/view?usp=sharing>

Desarrollo: Esta fase incluye tres tareas: la elaboración, producción y evaluación. Y se elaboran los **recursos digitales** planeados en la fase de diseño (guía didáctica): videos, presentaciones electrónicas, actividades e instrumentos de evaluación, mapas mentales o conceptuales, objetos de aprendizaje, ejercicios y animaciones, etc., de los diferentes temas que conforman la asignatura y de acuerdo con la metodología del TECNМ para los recursos digitales a través de entornos virtuales y al estándar 366 de CONOCER.

En esta fase de **ADDIE** se complementa con el estándar 366, en el elemento 2 de 3, y en la cual el diseño instruccional se encuentra comprendido dentro de la **guía de actividades**, donde se desarrollan de acuerdo con las teorías del aprendizaje descritas anteriormente y a los resultados de aprendizaje que establece Pozo (2013):

Elemento 2 de 3. Elaborar los contenidos del curso de formación en línea. Los productos que se obtienen son (Estándar 366 de CONOCER):

- ☐ La guía de actividades de aprendizaje de cada unidad del curso de formación en línea diseñada. Véase **anexo C**.
- ☐ El calendario general de actividades establecido (**Anexo D**). Véase figura 84.
- ☐ El documento de texto elaborado (**R 1.5 Antología**).
- ☐ La presentación electrónica elaborada (**R 1.1-R 1.3**).
- ☐ El material multimedia elaborado (**R 1.4**).
- ☐ El instrumento de evaluación del aprendizaje elaborado (**Anexo E1, E2 y E3**).

Calendario general del curso en línea



MATERIA:	SEMESTRE:
CALCULO VECTORIAL	AGOSTO 2021-ENERO 2022
Docentes: M.T.A. Nicolasa Hernández Sosa	

Unidad temática	Nombre de la actividad	Ponderación	Periodo de realización	Fecha de cierre
1. Vectores en el espacio. [30 de agosto -25 de septiembre de 2021]	AA.1.1. Vectores en mi entorno con resolución de ejercicios	2 %	Del 30 de agosto al 1 de septiembre de 2021	03/09/2021
	A.1.1. Problemario	15%	Del 01 al 06 de septiembre de 2021.	08/09/2021

Figura 84. Calendario del curso

Implementación: Implica que todos los materiales, producto de la fase de desarrollo se traspasa en la plataforma educativa, y se establece el ambiente de aprendizaje adecuado para alcanzar las competencias definidas en cada una de las asignaturas, es decir, poner en marcha el diseño instruccional de forma eficiente y efectiva en los medios seleccionados para su difusión, tal como se muestra en la figura 85, 86 y 87. La cual se complementa con el estándar 366 de CONOCER (2013) en el elemento 3 de 3.

Elemento 3 de 3. Verificar el funcionamiento del curso en la plataforma educativa. El producto es:

- ☐ El reporte para la revisión del funcionamiento del curso de formación en línea elaborado.



Figura 85. Curso Cálculo vectorial en Classroom

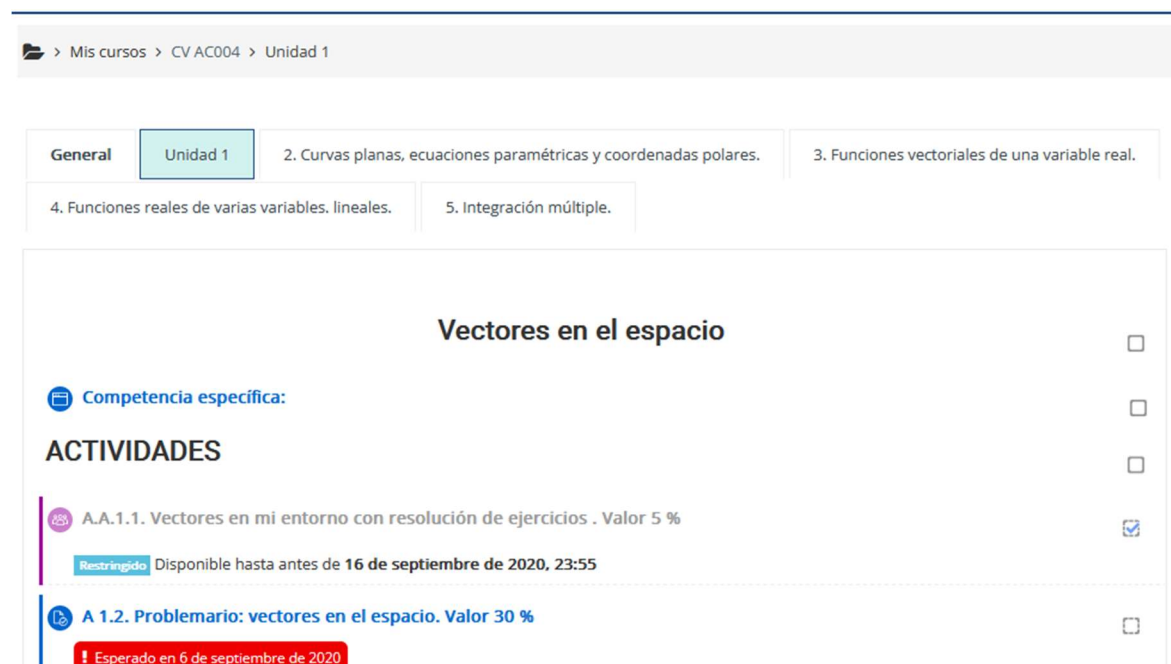


Figura 86. Curso Cálculo vectorial en Moodle

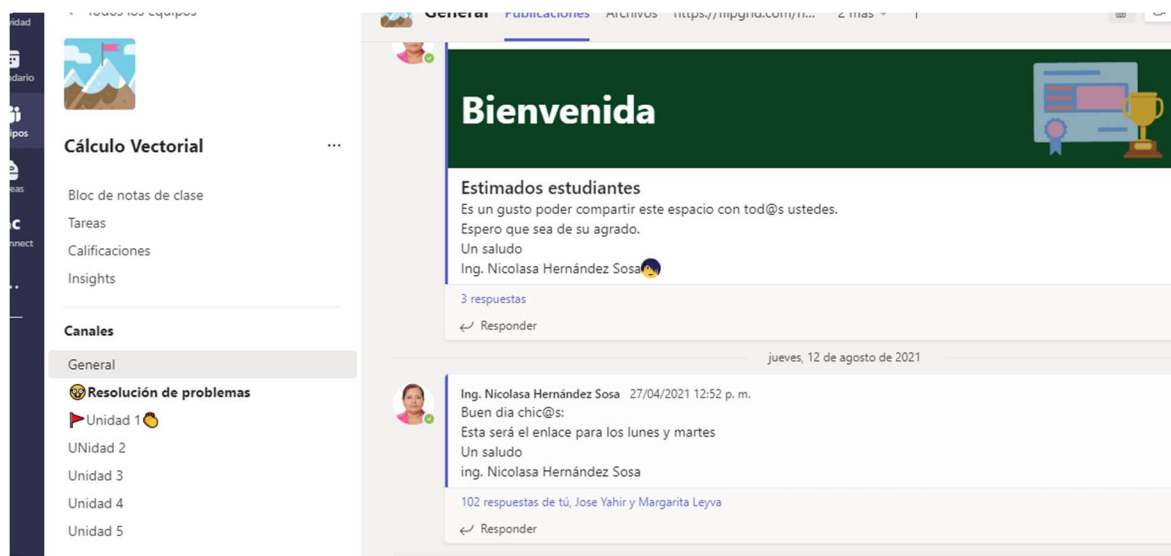


Figura 87. Curso cálculo vectorial en Microsoft Teams

Evaluación: Esta etapa se lleva a cabo al inicio por los pares académicos para evaluar la estructura y recursos del curso implementado en plataforma (evaluación formativa), para los cuales se utilizan listas de cotejo, tanto las del TECNM para evaluar la estructura del curso en línea como para los recursos que establece el estándar 366 de CONOCER y que deben tener los cursos en línea, los cuales se encuentran como Tabla C2. Formato TECNM_cursos.pdf en línea y E1Diagnóstico EC0366.pdf, E2Diagnóstico EC0366.pdf y E3Diagnóstico EC0366.pdf, figuras 88, 89, 90 y 91 respectivamente, y los documentos completos están en la carpeta evaluación ECO366 de la siguiente dirección:

https://drive.google.com/drive/folders/1xwGLSFUFcmWxKos_74MVbhuFGcpN0Otg?usp=share_link

Tabla C2. Formato para la Revisión de la Estructura de la Asignatura en Plataforma Moodle para Educación a Distancia

Nombre de la asignatura:		Clave:	
Carrera (s):		Plan:	
		No. de temas:	
		Semestre:	
Realizado por:			
Revisado por:			
Periodo de elaboración:			
Fecha de revisión :		Fecha de validación:	

Estructura:				
Aspectos que debe cumplir:		SI	NO	Observaciones
GENERALIDADES DE LA ASIGNATURA				
1	Nombre de la asignatura			
2	Imagen o animación alusiva a la asignatura			
3	Fotografía del docente			
4	Nombre del docente que imparte la asignatura			
5	Datos de contacto del docente			
6	Programa oficial de la asignatura			
7	Proyecto a desarrollar en la asignatura			
8	Evaluación diagnóstica 8.1. Conocimientos previos 8.2. Aspectos contextuales 8.3. Conocimientos generales del curso			
9	Criterios de acreditación de la asignatura			
10	Temas de la asignatura			
10.1	Título del tema			
10.2	Duración del tema			
10.3	Competencia específica del tema			
10.4	Tabla de actividades del tema:			
	a) Actividad			
	b) Valor			
	c) Fecha de entrega			
	d) Evidencia a evaluar			
10.5	Recursos del tema			
10.6	Actividades del tema con sus instrumentos de evaluación			

Figura 88. Lista de cotejo para evaluar curso en línea. Fuente: TECNM

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Página 1 de 3

I. INFORMACIÓN GENERAL PARA LA EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA		
NOMBRE DEL REPRESENTANTE DE LA ECE/CE O El:		Fecha de Aplicación:
NOMBRE DEL CANDIDATO:		
Código EC0366	Evaluación diagnóstica para el Desarrollo de cursos de formación en línea	Nivel TRES
Parámetro de duración de la evaluación: 30 minutos a 1 hora		

Instrucciones: señale con una X en la columna de "SI" si usted realiza la actividad que señala el reactivo o en la columna "NO" si usted no lo realiza.			
Consecutivo	Reactivo	Si	No
El cronograma para desarrollar cursos en línea elaborado:			
1	Contiene el título del curso		
2	Describe el objetivo general del curso		
3	Especifica la fecha de elaboración en formato día, mes y año		
4	Especifica un número consecutivo para cada actividad a realizar durante el desarrollo del curso		
5	Incluye actividades que contemplan la elaboración de la estructura temática del curso		

Figura 89. Desarrollo de curso en línea. Paso 1 Fuente: CONOCER

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Página 1 de 5

I. INFORMACIÓN GENERAL PARA LA EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA			
NOMBRE DEL REPRESENTANTE DE LA ECE/CE O EI:		Fecha de Aplicación:	
NOMBRE DEL CANDIDATO:			
Código EC0366	Evaluación diagnóstica para el <i>Desarrollo de cursos de formación en línea</i>	Nivel TRES	
Parámetro de duración de la evaluación: 30 minutos a 1 hora			

Instrucciones: señale con una X en la columna de "SI" si usted realiza la actividad que señala el reactivo o en la columna "NO" si usted no lo realiza.			
Consecutivo	Reactivo	Si	No
La guía de actividades de aprendizaje de cada unidad del curso de formación en línea que Usted diseña:			
1	Especifica el nombre de la unidad de aprendizaje		
2	Incluye el objetivo específico de la unidad de aprendizaje		
3	Contiene la descripción de las actividades de aprendizaje, indicando el título de la actividad, instrucciones, materiales o recursos.		

FIRMA DEL CANDIDATO
FIRMA DEL REPRESENTANTE DE LA ECE/CE/EI

Figura 90. Desarrollo de cursos en línea. Paso 2. Fuente: CONOCER.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Página 1 de 4

I. INFORMACIÓN GENERAL PARA LA EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA			
NOMBRE DEL REPRESENTANTE DE LA ECE/CE O EI:		Fecha de Aplicación:	
NOMBRE DEL CANDIDATO:			
Código EC0366	Evaluación diagnóstica para el <i>Desarrollo de cursos de formación en línea</i>	Nivel TRES	
Parámetro de duración de la evaluación: 30 minutos a 1 hora			

Instrucciones: señale con una X en la columna de "SI" si usted realiza la actividad que señala el reactivo o en la columna "NO" si usted no lo realiza.			
Consecutivo	Reactivo	Si	No
El reporte para la revisión del funcionamiento del curso de formación en línea que Usted elabora			
1	Incluye nombre del curso		
2	Incluye nombre del desarrollador		
3	Contiene fecha de revisión del curso		
4	Incluye observaciones de diseño		

Figura 91. Desarrollo de cursos en línea. Paso 3. Fuente: CONOCER.

La evaluación formativa durante, será aplicada a los estudiantes de Cálculo vectorial mediante los cuestionarios en línea o incrustados en los videos para las actividades previas y que se encuentran en línea.

Mientras que la evaluación sumativa se aplicará al final de la unidad 1 a los estudiantes, para medir el aprendizaje en las distintas evidencias, a través de varios instrumentos, que se especifican como R 1.8 Lista de Cotejo-problemario unidad 1.pdf y R 1.9 Guía de observación-practica unidad 1.pdf, además de un examen presencial, como se aprecia en las figuras 92 y 93 respectivamente, y que se encuentran de forma completa en los siguientes enlaces:

https://drive.google.com/file/d/1yNjof9rMaydMV29hKUd048o2PWueY0Ec/view?usp=share_link

<https://drive.google.com/file/d/1cJ6lshqoGYDuDlwe88QRMSEO4KU-4NCx/view?usp=sharing>

https://drive.google.com/file/d/1q84CqXw5QT_RmpvsWDtibPMVlgYGwSN0/view?usp=sharing

LISTA DE COTEJO: PROBLEMARIO UNIDAD 1						
Nombre de la asignatura: Cálculo vectorial			Unidad Temática: 1. Vectores en el espacio.			
			Fecha: / /			
Nombre de los estudiantes integrantes del Equipo			Retroalimentación			
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
Datos generales del proceso de evaluación						
Producto: Problemario		Valor: 30 %	Periodo escolar: Febrero – Junio 2022			
Instrucciones						
Revisar las actividades que se solicitan y marque con una X en los apartados "SI" cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque "NO". En la columna "OBSERVACIONES" coloque las recomendaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, cuando los reactivos no se cumplan al cien por ciento, escriba en el apartado de retroalimentación las acciones que el alumno puede realizar para lograr la competencia de la unidad. El tiempo para realizar la actividad es de 60 minutos.						
NO	Valor del reactivo %	Característica a cumplir para la práctica	Cumple			Observaciones
			Si	No	Real	
1	4	Cantidad:				
		Resuelve al menos el 70% de los problemas planteados siguiendo un procedimiento claro, completo y correcto.				
2	7	Resultados:				
		Alcanza el resultado correcto de al menos 70% de los ejercicios/problemas con vectores y ecuación de rectas e interpreta de acuerdo al planteamiento.				
3	7	Definición y representación de los problemas con precisión.				
		Define problemas y utiliza conceptos o herramientas correctas para la solución de vectores y ecuación de				

Figura 92. Lista de cotejo para problemario. Fuente: Autoría propia.

LISTA DE COTEJO PRACTICA DE LA UNIDAD 1						
Nombre de la asignatura: Cálculo vectorial		Unidad Temática: 1. Vectores en el espacio				
		Fecha: / /				
Nombre de los estudiantes integrantes del Equipo		Retroalimentación				
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
Datos generales del proceso de evaluación						
Producto: El reporte de práctica unidad 1. Representación geométrica y analítica de vectores y rectas.		Valor: 30 %	Periodo escolar: Febrero – Junio 2022			
Instrucciones						
Revisar las actividades que se solicitan y marque con una X en los apartados "SI" cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque "NO". En la columna "OBSERVACIONES" coloque las recomendaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, cuando los reactivos no se cumplan al cien por ciento, escriba en el apartado de retroalimentación las acciones que el alumno puede realizar para lograr la competencia de la unidad. El tiempo para realizar la actividad es de 90 minutos.						
NO	Valor del reactivo %	Característica a cumplir para la práctica	Cumple			Observaciones
			Si	No	Real	
1	1	Resumen				
		El reporte incluye un resumen claro, completo y acorde al tema de vectores y ecuación de la recta.				
2	1	Material				
		Identifica y utiliza conceptos o herramientas adecuadas para la representación de vectores y ecuaciones de rectas.				
3	1	Objetivo:				
		Alcanza los objetivos planteados por la práctica				
4	6	TIC's:				
		Representa geométrica y analíticamente al menos un par de problemas por cada tema de vectores y ecuaciones de rectas, y de forma analítica coincide con lo que tiene en el problemario de la unidad 1.				
5	10	Aplicaciones:				
		Investiga y presenta de manera clara, ordenada y correcta al menos 3 aplicaciones que tienen que ver con vectores y ecuaciones de rectas, relacionadas con su carrera.				
6	3	Conclusión				
Intervista los resultados de manera conjunta con referentes u						

Figura 93. Lista de cotejo para práctica. Fuente: Autoría propia.

Resumiendo todo lo anterior se puede apreciar en la figura 94:

Modelo ADDIE e integración con el estándar 366 de CONOCER y resultados de aprendizaje (Pozo, 2013)



Figura 94. Integración Modelo ADDIE, estándar 366 y resultados de aprendizaje de Pozo(2013). Fuente: Autoría propia.

Capítulo 5. Estructura del curso en línea

En esta parte se especifica como queda la estructura del curso en línea basados en las fases de análisis, diseño, desarrollo, implementación del modelo ADDIE y los elementos del estándar 366 de CONOCER así como los resultados de aprendizaje que sugiere Pozo (2013):

5.1 General

En este apartado se sugiere que al menos tenga los siguientes apartados:

- ☐ Bienvenida por parte del docente.
- ☐ Datos del docente
- ☐ Programa de Cálculo vectorial
- ☐ Examen diagnóstico de Cálculo vectorial
- ☐ Documento de información general del curso
- ☐ Guía didáctica
- ☐ Calendario de actividades
- ☐ Criterios de acreditación del curso.

Como se puede apreciar en la figura 95:

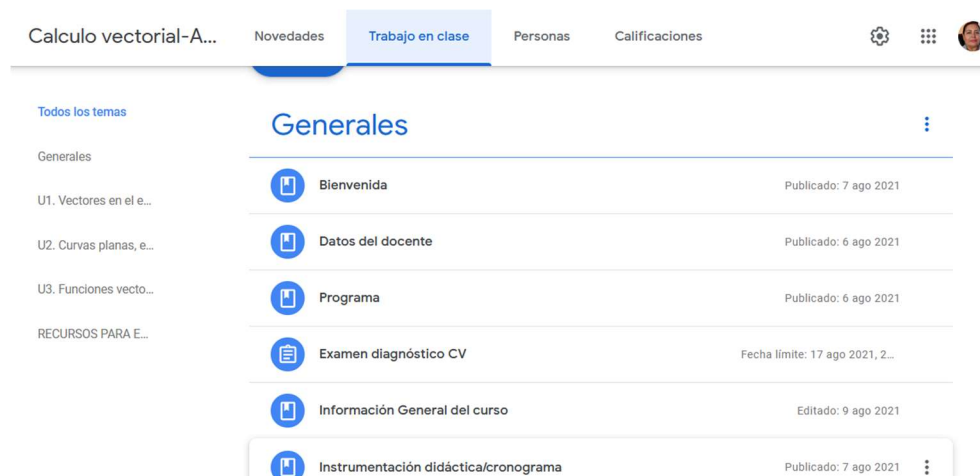


Figura 95. Generales. Plataforma classroom.

El curso en la plataforma classroom se puede verificar en el siguiente vínculo:

<https://classroom.google.com/c/Mzc2NDQ1ODAxOTMx?cjc=jedlqgw>

5.2 Unidad temática

En este apartado se sugiere que cada unidad tenga la siguiente estructura (Véase figura 96 y figura 97):

- ❑ U1. Título de la unidad
 - Actividad con la siguiente nomenclatura: A A (si es actividad de apertura) seguido de número de unidad, seguida de número de actividad, por ejemplo A A 1.1 y A A 1.2, si es de desarrollo o cierre sólo debe llevar A seguida de número de unidad seguida de número de actividad, y opcionalmente un título alusivo a la actividad. Por ejemplo A A 1.1 Vectores en el plano.
 - Descripción de la actividad: que contenga:
 - Objetivo:
 - Indicaciones/instrucciones.
 - Diseño de la tarea
 - Modalidad.
 - Formato de entrega.
 - Fecha de entrega.
 - Valor de la actividad.
 - Evidencia que evaluar.
 - Criterios de evaluación.
 - Recurso para apoyar la actividad (opcional). Puede estar dentro de la actividad.
 - Recurso para evaluar la actividad (opcional). Puede estar dentro de la actividad.

En resumen, todo curso deberá tener la estructura que se muestra en la figura 98.

Calculo vectorial-A... Novedades Trabajo en clase Personas Calificaciones

Generales

U1. Vectores en el e...

U2. Curvas planas, e...

U3. Funciones vecto...

RECURSOS PARA E...

Nicolasa Hernández Sosa publicó una nueva tarea: A A 1.1 Vectores en el plano

Publicado: 20:38 (Editado: 20:41)

Objetivo: Identificar conceptos y resolver operaciones con vectores de manera introductoria.

Instrucciones

1. **Revisa** la lectura R. 1.1. **Vectores y sus operaciones en el plano**, que se encuentra en plataforma como recurso o adjunto.
2. **Responde** en el cuestionario **Actividad de apertura 1.1** en línea sobre las preguntas detonadoras que se encuentran dentro del documento.
3. **Resuelve** los ejercicios que se encuentran dentro del cuestionario y que se solicitan en el documento como recurso o adjunto.
4. **Revisa** lo que se calificará de esta actividad.
5. **Guarda** como A.A.1.1_Nombre completo del estudiante.pdf. Por ejemplo. A.A.1.1_Nicolasa Hernández Sosa.pdf

Modalidad: Individual

Lugar de entrega: En plataforma: *Unidad 1/tarea/ A A. 1.1.*

Formato de entrega: en línea y como archivo adjunto en pdf.

Fecha de entrega: 1 de septiembre de 2022.

Valor de la actividad: 2 %.

Criterios de evaluación: Cuestionario en línea, respuestas en archivo adjunto con portada u hoja de presentación.

0 Entregaron 18 Asignadas

Actividad de apertura 1.1 R.1.1 Vectores y sus oper...

Figura 96. Descripción de la actividad. Classroom.

> Cursos > Curso Docente > CV AC004 > Unidad 1. Vectores en el espacio > A 1.1. Problemario: vectores en el espacio. Valor ...

A 1.1. Problemario: vectores en el espacio. Valor 30 %

Objetivo: Resolver ejercicios/ problemas del álgebra vectorial como producto escalar y vectorial, así como ecuación de la recta y del plano.

Instrucciones

1. **Revisa** las lectura R. 1.2, R 1.3, R 1.5, que se encuentra en plataforma como recurso o adjunto.
2. **Descarga** los ejercicios/problemas que se adjuntan como recurso o dentro de los documentos.
3. **Resuelve** los ejercicios/problemas que se adjuntan dentro de la actividad.
4. **Revisa** lo que se calificará en la lista de cotejo de esta actividad.
5. **Guarda** como A.1.1_Nombre completo del estudiante.pdf. Por ejemplo. A.1.1_Nicolasa Hernández Sosa.pdf.

Modalidad: colaborativo máximo 3 integrantes.

Lugar de entrega: *Unidad 1/tarea/ A.1.1.*

Formato de entrega: en línea y como archivo adjunto en pdf.

Fecha de entrega: 20 de septiembre de 2022.

Valor de la actividad: 30 %.

Criterios de evaluación: Portada u hoja de presentación, puntualidad y autoría.

Figura 97. Descripción de actividad. Moodle

Estructura de un curso en línea

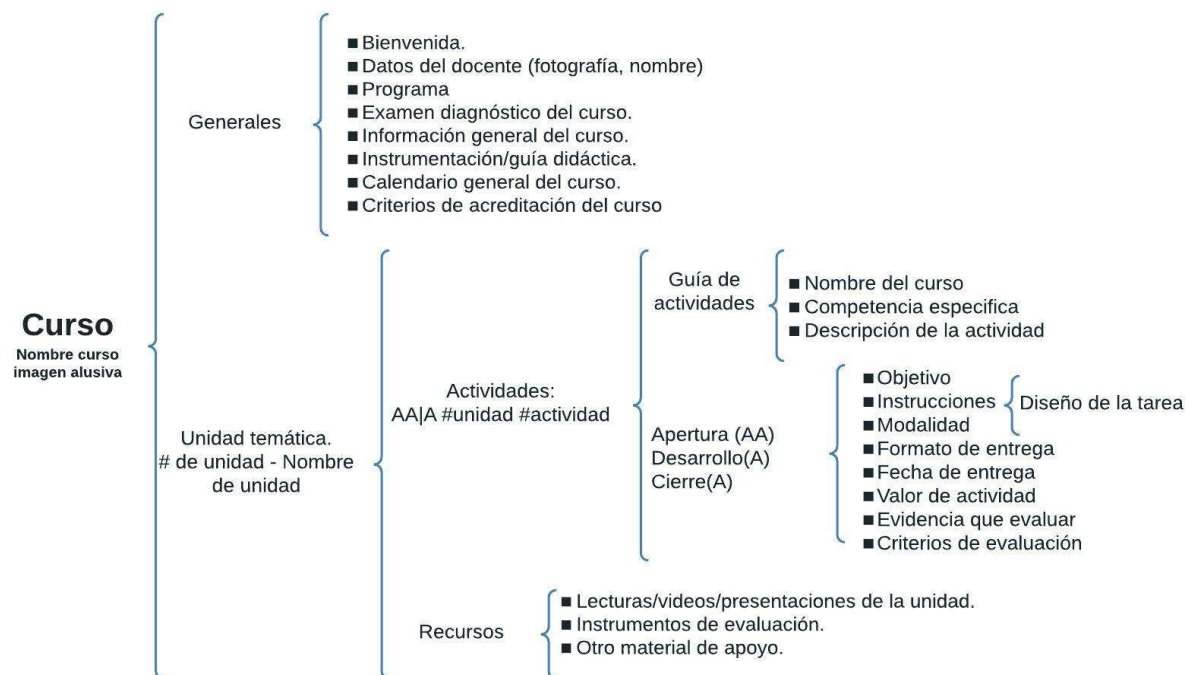


Figura 98. Estructura de un curso en línea. Autoría propia

Capítulo 6. Conclusiones

Se hace una propuesta didáctica basándose en el modelo ADDIE cuyas fases de Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación y Evaluación, complementando con el estándar 366 de CONOCER y resultados de aprendizaje propuestos por Pozo, fueron guiando el proceso para desarrollar el diseño instruccional del curso de Cálculo Vectorial en la modalidad B_Learning:

- ❑ Análisis: Se detectaron características de los estudiantes, habilidades de los docentes, infraestructura tecnológica, se identificaron las teorías del aprendizaje y resultados propuestos por Pozo, 2013 (verbal y procedimental), que tiene que ver con el saber decir y saber hacer.
- ❑ Diseño: Se elabora la guía didáctica que contiene las estrategias de enseñanza – aprendizaje e instrumentos de evaluación para cada evidencia y se elabora el documento de información general del curso que establece el estándar 366 de CONOCER.
- ❑ Desarrollo. Se elaboran todos los materiales de enseñanza – aprendizaje, propuestos en la guía didáctica y que cumple con el catálogo de productos del TECNM y el estándar 366 de CONOCER: videos, presentaciones electrónicas, actividades e instrumentos de evaluación, mapas mentales o conceptuales, podcast, objetos de aprendizaje, ejercicios y animaciones, etc. Y se agrega algo más que establece el estándar 366, el cual es la guía de actividades, cuya secuencia de actividades desarrolla el diseño instruccional a nivel B_learning.
- ❑ Implementación: Se diseña un curso bajo la modalidad B_learning apoyado con ADDIE y el estándar 366 de CONOCER, y se desarrollan los ejercicios de acuerdo con los resultados de aprendizaje que establece POZO, 2013.
- ❑ Evaluación: Se evalúa el curso de acuerdo con lo que establece TECNM (Modelo ADDIE) y el estándar 366, en el proceso de Inicio y finalización, tanto por estudiantes como por pares académicos.

Las teorías del aprendizaje, modelo ADDIE, estándar 366 que en este trabajo se mencionan, dan soporte al diseño de actividades en la modalidad B_learning, ya que se propone mejorar los cursos en línea que oferta el ITSAT, y sobre todo para los que son del área de Ciencias Básicas, a través de un diseño instruccional y

elaboración de materiales y actividades, en los niveles verbal y procedimental que propone Pozo (2013).

Para el aprendizaje verbal, en el nivel de información verbal se desarrollaron materiales para reforzar los conocimientos previos y el estudiante sólo tiene que realizar tareas repetitivas o conductista, sobre teoría y ejercicios de vectores y ecuaciones en el plano. Mientras que, en el nivel de conceptos y cambio conceptual, el estudiante debe comprender e interpretar conceptos, además de desarrollar ejercicios de ecuación de la recta y ecuación del plano, con un aprendizaje más significativo.

Para el aprendizaje procedimental, se desarrollaron materiales que incluyeran los conocimientos previos, para resolver problemas más complejos o elaborados, en los temas de ecuación de la recta en su forma vectorial y ecuación del plano, en donde el estudiante debe confrontar lo que ya sabe para incorporar nuevos conocimientos.

Concluyendo, que todo aprendizaje requiere un andamiaje de saberes previos para poder escalar a otro nivel, y este trabajo trata de aportar como debe ser el puente entre el diseño instruccional y las teorías puestas en práctica.

El conjunto de materiales, anexos y tesina, se encuentra en la siguiente url:
https://drive.google.com/drive/folders/1tgcibTvjG2E4TDbw-n3XcYbklgygHQBh?usp=share_link

Referencias

- Bracho, J. (2021). *Introducción analítica a las Geometrías*. México: FCE - Fondo de Cultura Económica.
- Campos Arenas, A. (2017). *Enfoques de enseñanza basados en el aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Ediciones de la U.
- Carmona, I. (2011). *Ecuaciones Diferenciales*. Mexico: Pearson Educacion.
- Carpinteyro Virgil, E. (2018). *Geometría Analítica*. México, D.F.: Patria.
- CONOCER. (20 de 11 de 2013). *Estándar 366*. Obtenido de <https://conocer.gob.mx/RENEC/fichaEstandar.do?method=obtenerPDFEstandar&dEstandar=1627>
- Cruz Abeyro, N. (2017). *Manual de diseño instruccional: Una propuesta con tareas integradoras (TI)*. México, D.F.: Editorial Digital UNID.
- Edwards, B., & Larson, R. (2017). *Matemáticas III Cálculo de varias variables*. México, D.F.: Cengage Learning.
- Escribano González, A., & del Valle, A. (2010). *Aprendizaje Basado en problemas (ABP): una propuesta metodológica en educación superior*. Madrid España: Narcea Ediciones.
- Gallardo Vázquez, P. J., & Camacho Herrera, M. (2016). *Teorías del aprendizaje y práctica Docente*. Sevilla, España: WANCEULEN EDITORIAL .
- Marcos Marín, B. (2011). *Psicología del aprendizaje*. República Dominicana: Editora UAPA.
- Morales Bueno, P., & Landa Fitzgerald, V. (2004). Aprendizaje Basado en Problemas. *Theoria*, 13(145-147), 13. Obtenido de <http://www.ubiobio.cl/theoria/v/v13/13.pdf>
- Moreno, F. (2005). *Teoría de la instrucción VS Teoría del Aprendizaje significativo: Contraste entre J. Bruner y D. Ausubel*. Valencia, Venezuela: El Cid Editor.
- Moust, J. H., Bouhuijs, P. A., & Schmidt, H. G. (2007). *El aprendizaje basado en problemas: guía del estudiante (Vol. 1)*. España: Universidad de Castilla la Mancha.
- Murcia Rodríguez, M. A. (2020). *Diseño instruccional para profes: guía para la innovación educativa con TIC*. Bogotá, Colombia: Ediciones USTA.

- Ortiz Cárdenas, T., Calderón Ariosa, R. M., & Travieso Valdés, D. (2016). *La enseñanza por proyectos y el Aprendizaje basado en Problemas (ABP). Ds enfoques desde una perspectiva innovadora*. La Habana: Editorial Universitaria.
- Ortiz Ocaña, A. (2013). *Modelos pedagógicos y teorías del aprendizaje*. España: Ediciones de la U.
- Pellón Suárez, R., Miguéns Vázquez, M., Orgaz Jimenez, C., Ortega Lahera, N., & Pérez Fernández, V. (2015). *Psicología del Aprendizaje*. Madrid, España: UNED.
- Posada Hernández, G. J. (2012). *Ecuaciones lineal y cuadrática*. Medellín Colombia: Universidad Católica Luis Amigó.
- Pozo, J. I. (2013). *Aprendices y maestros*. Madrid: Alianza Editorial S. A.
- Quijada Monroy, V. d. (2014). *Aprendizaje virtual*. México, D.F.: Editorial Digital UNID.
- Rodríguez Cárdenas, D. E. (2018). *Problemas contemporáneos en psicología educativa*. Bogotá, Colombia: Universidad de la Sabana.
- Rodríguez Palmero, M. L. (2013). *La teoría del aprendizaje significativo en la perspectiva de la psicología cognitiva*. Barcelona: Ediciones Octaedro, S.L.
- Rojas Álvarez, C. J. (2021). *Introducción a la proporción y a los vectores*. Barranquilla, Colombia: Universidad del Norte. .
- Schunk, D. (2012). *Teorías del aprendizaje: una perspectiva educativa (6a. ed.)*. . . México, D.F.: Pearson Educación.
- Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*. México. D.F.: Cengage Learning.
- TECNM. (Noviembre de 2015). *Modelo de Educación a Distancia*. Obtenido de https://tapachula.tecnm.mx/Modelo_Educativo/Modelo_Educacion_Distancia_TecNM.pdf
- TECNM. (2016). *Cálculo Vectorial*. Obtenido de ACF – 0904: <http://www.itcg.edu.mx/pdf/ISIC/3/Calculo%20Vectorial.pdf>
- Vargas, E., & Nuñez, L. (2020). *Geometría III. Geometría Analítica plana y del espacio*. República Dominicana: Ediciones UAPA.
- Villalobos, E., & Cornejo, M. C. (2014). *Cálculo de varias variables con aplicaciones en Matlab bajo el enfoque de competencias*. México. D. F.: Pearson.
- Woolfolk, A. (2014). *Psicología Educativa*. Estado de México: Pearson.

Anexo A: Guía didáctica CV

Guía Didáctica (Instrumentación)

Esta guía didáctica está dirigida a los tres tipos de estudiantes identificados en el Modelo de Educación a Distancia del TecNM, los cuales son: estudiantes sin acceso a la educación superior en su región, estudiantes con disposición parcial de tiempo para actividades de aprendizaje y estudiantes sin disponibilidad de asistir al Instituto.

Competencia general del curso:

Datos Generales

1. Nombre de la asignatura	Cálculo vectorial
2. Competencia general del curso	Aplica los principios y técnicas básicas del cálculo vectorial para resolver problemas de ingeniería del entorno.
3. Carrera en la que se imparte	Todas las carreras
4. Clave de la asignatura	ACF-0904

5. Profesor(es) diseñador(es):	Ing. Nicolasa Hernández Sosa
6. Requerimientos de infraestructura tecnológica y conectividad:	Plataforma x. Internet. Computadora
7. Programación de tiempo en el curso:	Créditos de la asignatura: 3-2-5 Total de horas del curso: 80 Horas promedio semanales de conectividad a internet: 10 Horas promedio semanales de realización de actividades por parte del estudiante: 10
Revisado por:	
Periodo de elaboración:	

Análisis

8. Aportación de la asignatura a las competencias del perfil de egreso:	
Desarrolla un pensamiento lógico-matemático al perfil del ingeniero y aporta las herramientas básicas para aplicar el estudio del cálculo integral y sus aplicaciones. Además, proporciona herramientas que permiten modelar fenómenos de contexto.	
9. Asignaturas con las que tiene relación la competencia general	
Previas	Posteriores
Álgebra, Cálculo Diferencial y Cálculo Integral	Ecuaciones Diferenciales
10. Modalidad en la que se aplica la guía:	
• No escolarizada a distancia (X) • Mixta (X)	
11. Competencias previas requeridas: Plantear problemas que requieren el concepto de función de una variable para el diseño de modelos matemáticos de problemas aplicados al ámbito profesional, mediante el uso de la derivada para su solución.	
Aplicar los principios y técnicas del cálculo integral en la solución de problemas reales de la ingeniería en su entorno.	
12. Competencias específicas a desarrollar en el curso:	
☐ Conoce y desarrolla las propiedades de las operaciones con vectores para resolver problemas de aplicación en las diferentes áreas de ingeniería. Determina ecuaciones de rectas y planos del entorno para desarrollar la capacidad de modelado matemático.	

- ☐ Establece ecuaciones de curvas planas, en coordenadas rectangulares, polares, o en forma paramétrica, para brindarle herramientas necesarias para el estudio de curvas más sofisticadas.
- ☐ Establece ecuaciones de curvas en el espacio en forma paramétrica, para analizar el movimiento curvilíneo de un objeto, así como contribuir al diseño de elementos que involucren curvas en el espacio.
- ☐ Aplica los principios del cálculo de funciones de varias variables para resolver y optimizar problemas de ingeniería del entorno, así como para mejorar su capacidad de análisis e interpretación de leyes físicas.
- ☐ Formula y resuelve integrales múltiples a partir de una situación propuesta, eligiendo el sistema de coordenadas más adecuado para desarrollar su capacidad para resolver problemas.
- ☐ Interpreta y determina las características de los campos vectoriales para su aplicación en el estudio de fenómenos físicos.

13. Competencias genéricas a desarrollar en el curso:

Competencias instrumentales

- Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.
- Habilidades básicas de manejo de la computadora
- Habilidades de gestión de información (habilidad para buscar y analizar información proveniente de fuentes diversas).

Competencias interpersonales

- Capacidad de trabajar en equipo,
- Capacidad crítica y autocrítica
- Habilidades interpersonales

Competencias sistémicas

- Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente
- Capacidad de adaptarse a nuevas situaciones
- Capacidad de generar nuevas ideas (creatividad)

- Habilidad para trabajar en forma autónoma

14. Estrategia general del curso:

El estudiante debe desarrollar la habilidad para modelar situaciones cotidianas en su entorno. Es importante que el estudiante valore las actividades que realiza, que desarrolle hábitos de estudio y de trabajo para que adquiera características tales como: la curiosidad, la puntualidad, el entusiasmo, el interés, la tenacidad, la flexibilidad y la autonomía.

El docente de Cálculo Vectorial debe mostrar y objetivar su conocimiento y experiencia en el área para construir escenarios de aprendizaje significativo en los estudiantes que inician su formación profesional. El docente enfatiza el desarrollo de las actividades de aprendizaje de esta asignatura a fin de que ellas refuercen los aspectos formativos: incentivar la curiosidad, el entusiasmo, la puntualidad, la constancia, el interés por mejorar, el respeto y la tolerancia hacia sus compañeros y docentes, a sus ideas y enfoques y considerar también la responsabilidad social y el respeto al medio ambiente, a través de actividades de apertura, de desarrollo y de cierre.

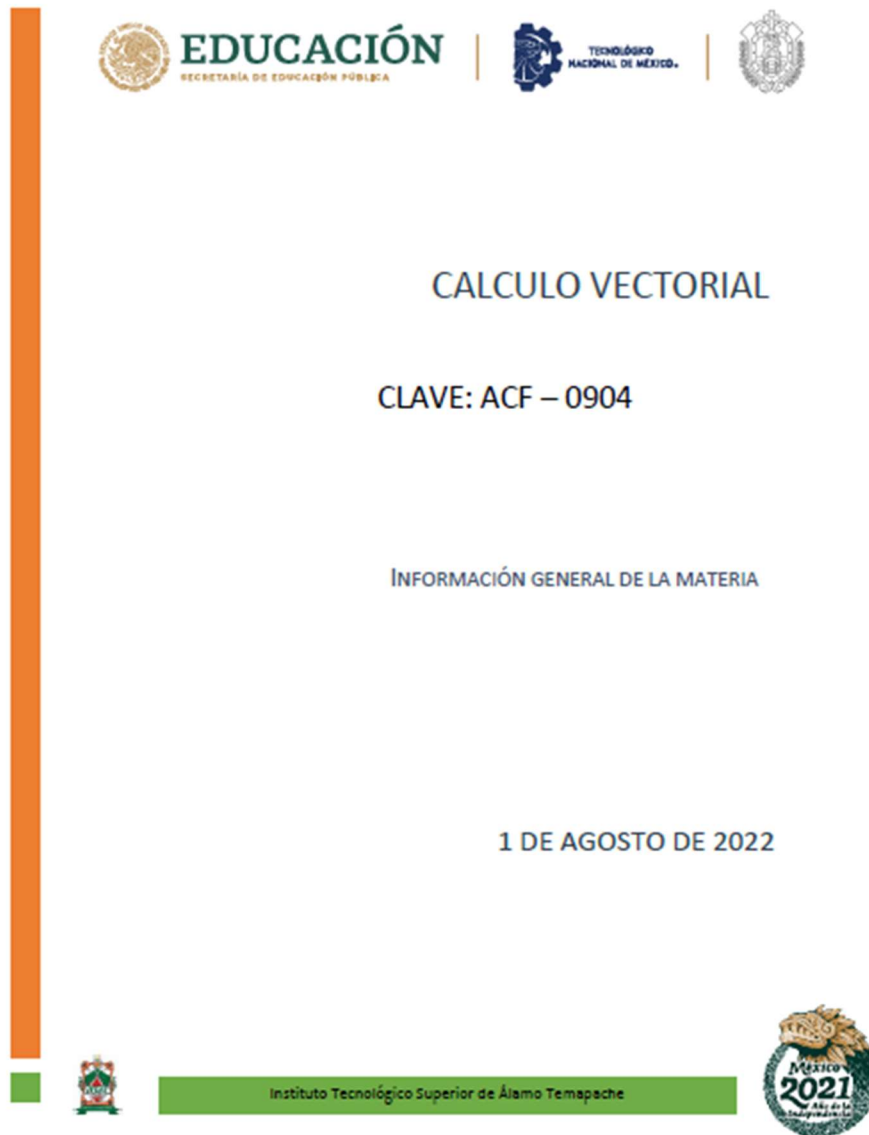
Diseño

15. Tema y competencia específica	16. Subtema	17. Actividades del docente	18. Actividad (es) de aprendizaje	19. Técnica didáctica	20. Apoyo didáctico (Recursos)	21. Herramienta en plataforma	22. Horas		23. Momento de evaluación (ED, EF, ES)
							Teóricas	Prácticas	
Evaluación diagnóstica. Información general del curso	Evaluación diagnóstica	Elabora una serie de preguntas y <u>problemas</u> en el examen diagnóstico. El docente elabora el documento de información general del curso	El estudiante revisa el documento de información general del curso y responde un par de preguntas en el examen diagnóstico. E.D. Examen diagnóstico Cálculo vectorial:	Técnica exploratoria	Cuestionario. Documento en pdf	Examen en línea Material en línea.	1.5	0.5	ED

Nota. En recursos se agrega completo el documento como **Anexo A**.

https://drive.google.com/file/d/1BRFtnVHj33F5kFireanR2oIZ3KsqQbiB/view?usp=share_link

Anexo B: Documento general del curso



En la siguiente url se puede descargar el anexo B:

<https://drive.google.com/file/d/1EbrZF4-474etaR2cUDN0XmEB9RwK-lxa/view?usp=sharing>

Anexo C: Guía de actividades.

5.3 A.A.1.1. Vectores en el plano

Objetivo: Identificar conceptos y resolver operaciones con vectores de manera introductoria.

Instrucciones

1. **Revisa** la lectura **R. 1.1. Vectores y sus operaciones en el plano**, que se encuentra en plataforma como recurso o adjunto.
2. **Responde** en el cuestionario **Actividad de apertura 1.1** en línea sobre las preguntas detonadoras que se encuentran dentro del documento.
3. **Resuelve** los ejercicios que se encuentran dentro del cuestionario y que se solicitan en el documento como recurso o adjunto.
4. **Revisa** lo que se calificará de esta actividad.
5. **Guarda** como A.A.1.1_Nombre completo del estudiante.pdf. Por ejemplo. A.A.1.1_Nicolasa Hernández Sosa.pdf

Modalidad: Individual

Lugar de entrega: En plataforma: *Unidad 1/tarea/ A A. 1.1.*

Formato de entrega: en línea y como archivo adjunto en pdf.

En el siguiente enlace podrá descargar de forma completa el Anexo C:

<https://drive.google.com/file/d/1ul-LLWpU8oNby3qC8JAW7luB22mHq2KJ/view?usp=sharing>

Anexo D. Calendario del curso

Calendario general del curso de Cálculo Vectorial



El documento completo lo puede encontrar en Anexos como Anexo D.

https://drive.google.com/file/d/1qJ1rwOOcCKGgHbb9DTSFDwL0iodzJgKX/view?usp=share_link

Anexo E. Instrumento de evaluación.