Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica

ESTRUCTURA ALGEBRAICA

Especialización en Aprendizaje y Enseñanza de las Ciencias Básicas,
[EACB-0211]
UNIDAD 5. Expresiones Algebraicas.
V.8 Ecuaciones y desigualdades de números reales.

Santiago de Querétaro, México
Diciembre de 2020

V.8 Ecuaciones y desigualdades de números reales.

Antes de iniciar con el estudio de las desigualdades, se recordará la definición de los signos: mayor que $>$, mayor o igual que $\geq$, menor que $<$ y menor o igual que $\leq$, además una de las propiedades de orden.

Definición de la relación "mayor que"
Si $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a > b}$ si y sólo si $\boldsymbol{a - b = p}$, donde $\boldsymbol{p}$ es un número real positivo.

Definición de la relación "mayor o igual que"
Si $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a \geq b}$ si una de las dos relaciones se cumple: $\boldsymbol{a > b}$, ó $\boldsymbol{a = b}$, en cuyo caso $\boldsymbol{a - b = p}$, donde $\boldsymbol{p}$ es un número real positivo, o bien $\boldsymbol{p = 0}$.

Definición de la relación "menor que"
Si $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a < b}$ si y sólo si $\boldsymbol{b - a = p}$, donde $\boldsymbol{p}$ es un número real positivo.

Definición de la relación "menor o igual que"
Si $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a \leq b}$ si una de las dos relaciones se cumple: $\boldsymbol{a < b}$, ó $\boldsymbol{a = b}$, en cuyo caso $\boldsymbol{b - a = p}$, donde $\boldsymbol{p}$ es un número real positivo, o bien $\boldsymbol{p = 0}$.

Ley de tricotomía de los números reales
Si $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$, una y solamente una de las siguientes relaciones es válida: $\boldsymbol{a > b}$, $\boldsymbol{a < b}$, ó $\boldsymbol{a = b}$.

Definición de Desigualdad
Una expresión de la forma: $\boldsymbol{a > b}$, $\boldsymbol{a \geq b}$, $\boldsymbol{a < b}$, ó $\boldsymbol{a \leq b}$; donde $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$, se llama DESIGUALDAD o INECUACIÓN.

Sean $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$ donde $\boldsymbol{a \neq 0}$, una **desigualdad de primer grado** en una variable $\boldsymbol{x}$ se define como:

$$\textbf{desigualdad de primer grado en una variable } \boldsymbol{x} \begin{cases} \boldsymbol{ax + b} & < \quad \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{ax + b} & \geq \quad \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{ax + b} & < \quad \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{ax + b} & \leq \quad \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Propiedades de las desigualdades.

Definición

Una solución de una ecuación es todo aquel valor que al sustituirlo por la incógnita o variable, hace que la **igualdad** (**o desigualdad**) se satisfaga. El **conjunto solución** está constituido por todas esas soluciones.

TEOREMA 1

La **propiedad transitiva** de las Desigualdades: Sean $\boldsymbol{a, b, c} \in \mathbb{R}$ donde $\boldsymbol{a > b}$ y $\boldsymbol{b > c}$; entonces $\boldsymbol{a > c}$

TEOREMA 2

Sean $\boldsymbol{a, b, c} \in \mathbb{R}$, donde $\boldsymbol{a > b}$ y $\boldsymbol{c > 0}$; entonces $\boldsymbol{a + c > b + c}$

TEOREMA 3

Sean $\boldsymbol{a, b, c} \in \mathbb{R}$, donde $\boldsymbol{a > b}$ y $\boldsymbol{c > 0}$; entonces $\boldsymbol{ac > bc}$
(*No se altera el sentido de la desigualdad*).

TEOREMA 4

Sean $\boldsymbol{a, b, c} \in \mathbb{R}$, donde $\boldsymbol{a > b}$ y $\boldsymbol{c < 0}$; entonces $\boldsymbol{ac < bc}$
(*Nota: Se invierte el sentido de la desigualdad*).

TEOREMA 5

Sean $\boldsymbol{a, b, c} \in \mathbb{R}$, donde $\boldsymbol{a > b > 0}$ y $\boldsymbol{c > 0}$; entonces $\boldsymbol{ac > bc}$

TEOREMA 6

Sean $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$, donde $\boldsymbol{a > b > 0}$ y $\boldsymbol{p} \in \mathbb{N}$; entonces $\boldsymbol{a^p > b^p}$

Ejemplos

1. Verificar la transitividad cuando $\boldsymbol{a = -8,5}$; $\boldsymbol{b = 7}$, y $\boldsymbol{c = 15}$

   Solución:
   Debemos verificar si: $\boldsymbol{a < b}$ y $\boldsymbol{b < c}$, entonces $\boldsymbol{a < c}$

   Comprobamos que: $\boldsymbol{-8,5 < 7}$ y $\boldsymbol{7 < 15}$, entonces $\boldsymbol{-8,5 < 15}$.

2. Multiplicar $\boldsymbol{-3 < 5}$ por $\boldsymbol{4}$.

   Solución:

   Al multiplicar una desigualdad por un número positivo, *no se altera el sentido de la desigualdad*, así que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{-3} &< \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{-3(4)} &< \boldsymbol{5(4)} \\ \boldsymbol{-12} &< \boldsymbol{20}. \end{aligned}$$

3. Multiplicar $\mathbf{-2 < 3}$ por $\mathbf{-6}$.

   Solución:

   Al multiplicar una desigualdad por un número negativo, *se invierte el sentido de la desigualdad*, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{-2} &< \mathbf{3} \\ \mathbf{(-2)(-6)} &< \mathbf{3(-6)} \\ \mathbf{12} &> \mathbf{-18}\,. \end{aligned}$$

4. Mostrar que la desigualdad $\mathbf{-17 < -11}$ se puede obtener a partir de la desigualdad $\mathbf{11 < 17}$

   Solución:

   Puesto que $\mathbf{11 < 17}$, multiplicando por $\mathbf{(-1)}$ a ambos lados de la desigualdad tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{11} &< \mathbf{17} \\ \mathbf{11(-1)} &< \mathbf{17(-1)} \\ \mathbf{-11} &> \mathbf{-17}\,. \end{aligned}$$

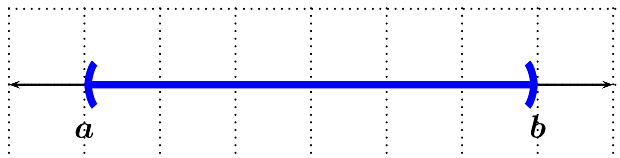
Intervalos.

Para definir intervalos utilizamos la notación de conjuntos.

- Si $\boldsymbol{a < b}$, el conjunto

$$\boldsymbol{(a, b)} \;=\; \boldsymbol{\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}}$$

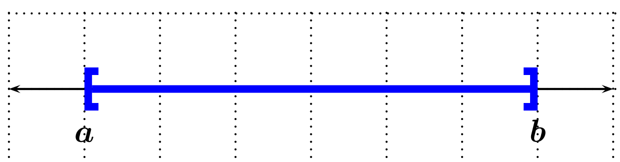
  se llama ***intervalo abierto*** y lo representamos geométricamente como:



- Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{a}$ están incluidos en el conjunto, entonces se representa:

$$\boldsymbol{[a, b]} \;=\; \boldsymbol{\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}}$$

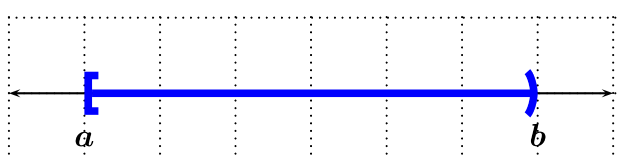
  se llama ***intervalo cerrado*** y lo representamos geométricamente como:



- Un intervalo es ***semiabierto*** si contiene sólo uno de los dos extremos, es decir,

$$\boldsymbol{[a, b)} \;=\; \boldsymbol{\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}}$$

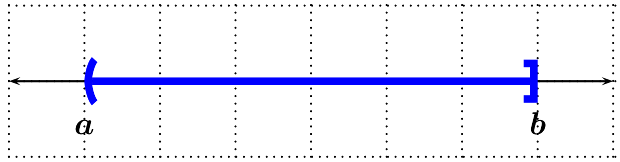
  y lo representamos geométricamente como:



  o bien como:

$$\boldsymbol{(a, b]} \;=\; \boldsymbol{\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}}$$

  y lo representamos geométricamente como:

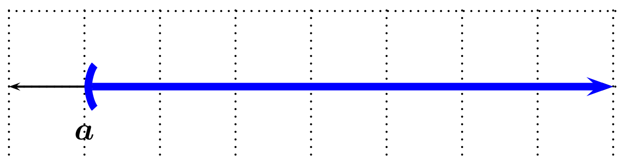


- Si $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{a}$ lo denotamos por:

$$(\boldsymbol{a}, \infty) \;=\; \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{x} > \boldsymbol{a}\}$$

  Utilizamos el símbolo ∞ para representar "infinito"; ∞ no es un número real y no satisface las reglas de la suma y el producto de los números reales.

  y lo representamos geométricamente como:

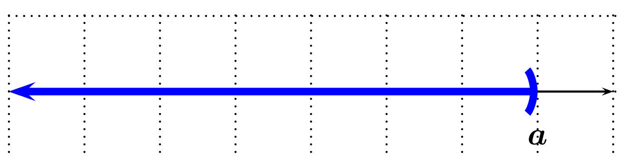


  en [2] lo llaman el rayo que parte de $\boldsymbol{a}$:

- Si $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{a}$ lo denotamos por:

$$(-\infty, \boldsymbol{a}) \;=\; \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a}\}$$

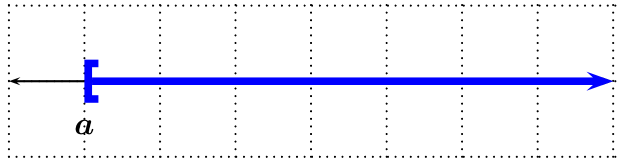
  y lo representamos geométricamente como:



- De la misma forma que antes, si queremos que el punto $\boldsymbol{a}$ esté incluido, escribimos

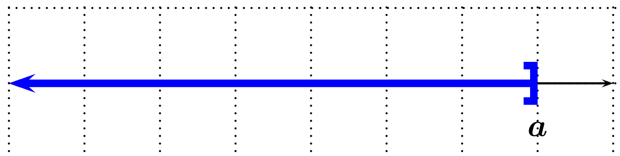
$$[\boldsymbol{a}, \infty) \;=\; \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{a}\}$$

  y lo representamos geométricamente como:



o bien como
$$(-\infty, a] \; = \; \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

y lo representamos geométricamente como:

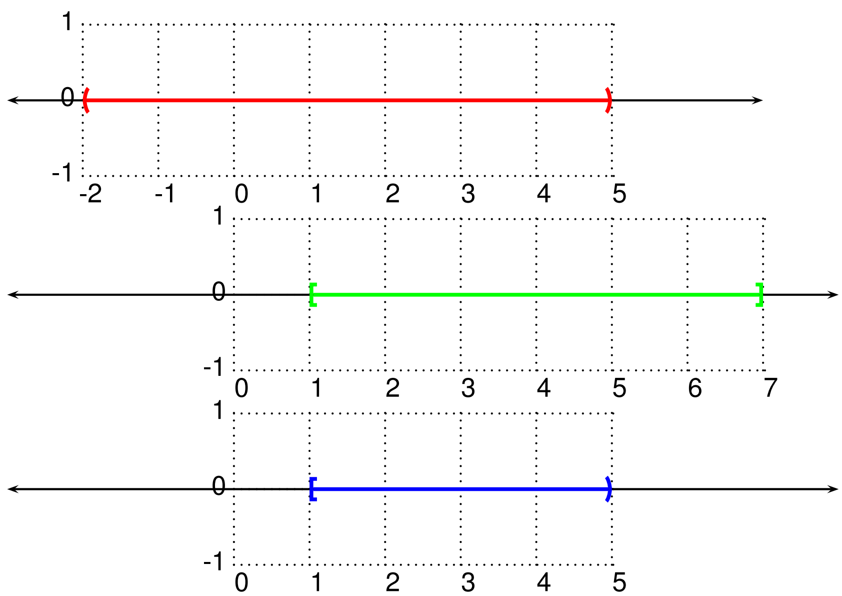


Uniones e intersecciones de Intervalos.

Usando las operaciones de conjuntos podemos representar **uniones** e **intersecciones** de intervalos.

Ejemplos:

1. Encontrar $(-2, 5) \cap [1, 7]$.
Solución:



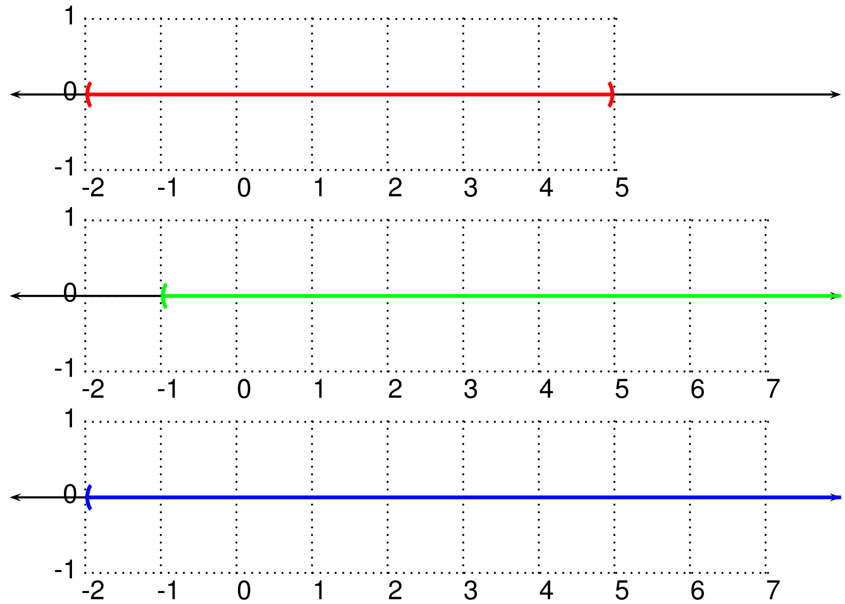
El posible número está en la **intersección**; si y sólo si está en ambos intervalos. Esto es:

$$(-2, 5) \cap [1, 7] \; = \; [1, 5).$$

2. Escribir el siguiente usando notación de intervalos,

$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 5\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x\}$

Solución



El posible número está en la **unión** si está en alguno de los intervalos, esto es, si está en uno de los intervalos, o en ambos.

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 5\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x\} \\
&= (-2, 5) \cup (-1, \infty) \\
&= (-2, \infty)
\end{aligned}$$

Conjuntos de solución.

Definición

Dada una desigualdad que involucra expresiones algebraicas de una o más variables, El conjunto de valores, pertenecientes al dominio de las variables, para los cuales es cierta la desigualdad dada, se llama **conjunto solución de la desigualdad**.

TEOREMA 7

El conjunto de soluciones de una desigualdad $f(x) > g(x)$, donde $f(x)$ y $g(x)$ representan expresiones algebraicas, no se altera ***sumando*** una expresión algebraica a ambos miembros, esto es. El conjunto de soluciones de $f(x) > g(x)$ es igual al conjunto de soluciones de $f(x) + P(x) > g(x) + P(x)$. Siempre y cuando el dominio de la variable no cambie.

TEOREMA 8

El conjunto de soluciones de una desigualdad $f(x) > g(x)$, donde $f(x)$ y $g(x)$ representan expresiones algebraicas, no se altera ***multiplicando*** a ambos miembros por una expresión algebraica $P(x)$ que represente un número positivo para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto de soluciones de $f(x) > g(x)$ es igual al conjunto de soluciones de: $f(x)P(x) > g(x)P(x)$. Siempre y cuando el dominio de la variable no cambie.

Ejemplo 1

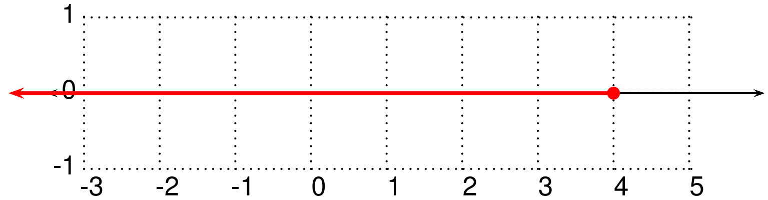
Encuentre el conjunto solución de la desigualdad: $15 - 5(x + \frac{7}{5}) \geq -3x$ y represéntelo en forma de conjunto, intervalo y en la recta numérica.

Antes de encontrar el conjunto solución, es importante determinar el ***dominio*** de la variable; en este caso, el dominio de la variable es todo el conjunto de los números reales porque para cualquier valor real que se le asigne a x, la expresión siempre representará un número real.

$$
\begin{array}{lcll}
15 - 5(x + \frac{7}{5}) & \geq & -3x & \\
 & & \{x | x \in \mathbb{R}\} & \text{establecer el dominio de la expresión} \\
15 - 5x - 5 \cdot \frac{7}{5} & \geq & -3x & \text{Propiedad distributiva de producto} \\
15 - 5x - \frac{35}{5} & \geq & -3x & \text{Producto de numeros racionales} \\
15 - 5x - 7 & \geq & -3x & \text{simplificación de numeros racionales} \\
8 - 5x & \geq & -3x & \text{suma de enteros} \\
8 - 5x + 3x & \geq & -3x + 3x & \text{Teorema 7} \\
8 - 2x & \geq & 0 & \text{Inverso aditivo y suma de expresiones} \\
-8 + 8 - 2x & \geq & -8 + 0 & \text{Teorema 2} \\
-2x & \geq & -8 & \text{Inverso aditivo}
\end{array}
$$

$$\begin{array}{lll} -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot(-\mathbf{2}\boldsymbol{x}) & \leq & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot(-\mathbf{8}) \quad \text{Teorema 4, propiedad Inverso multiplicativo} \\ \boldsymbol{x} & \leq & \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{2}} \quad \text{Producto de números racionales} \\ \boldsymbol{x} & \leq & \mathbf{4} \quad \text{Simplificación de números racionales} \end{array}$$

Por lo tanto el conjunto de las soluciones de la desigualdad es:
En forma de conjunto: $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x} |\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\ \wedge\ \boldsymbol{x} \leq \mathbf{4}\}$
En forma de intervalo: $\boldsymbol{S} = (-\infty, \mathbf{4}]$
En la recta numérica



Ejemplo 2

Resolver la desigualdad: $\mathbf{5}\boldsymbol{z} - \mathbf{9} < -\mathbf{12}$ y represéntelo en forma de conjunto, intervalo y en la recta numérica.

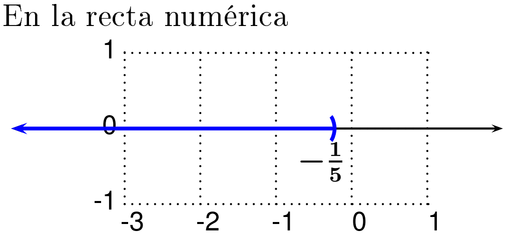
Solución:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{5}\boldsymbol{z} - \mathbf{9} & < & -\mathbf{12} \\ & & \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}\} \quad \text{establecer el dominio de la expresión} \\ \mathbf{5}\boldsymbol{z} - \mathbf{9} + \mathbf{9} & < & -\mathbf{12} + \mathbf{9} \quad \text{Sumamos 9 en ambos lados de la desigualdad} \\ \mathbf{5}\boldsymbol{z} & < & -\mathbf{3} \end{array}$$

Ahora multiplicamos ambos miembros de la desigualdad resultante por $\frac{1}{5}$ que por ser positivo no altera el sentido de la desigualdad:

$$\begin{array}{lll} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}(\mathbf{5}\boldsymbol{z}) & < & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}(-\mathbf{3}) \quad \text{Teorema 3} \\ \boldsymbol{z} & < & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} \quad \text{simplificación de números racionales} \end{array}$$

Por lo tanto el conjunto de las soluciones de la desigualdad es:
En forma de conjunto: $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}\ \wedge\ \boldsymbol{z} < -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\}$
En forma de intervalo: $\boldsymbol{S} = (-\infty, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}})$
En la recta numérica



Ejemplo 3

Resolver la desigualdad: $-\frac{3}{x}+\frac{7}{2}<\frac{13}{4}-\frac{5}{8x}$ y represéntelo en forma de conjunto, intervalo y en la recta numérica.

Solución:

$$
\begin{array}{lcll}
-\frac{3}{x}+\frac{7}{2} & < & \frac{13}{4}-\frac{5}{8x} & \\
 & & \{x \mid x\in\mathbb{R} \ \wedge \ x>0\} & \text{establecer el dominio de la expresión} \\
8x\left(-\frac{3}{x}+\frac{7}{2}\right) & < & 8x\left(\frac{13}{4}-\frac{5}{8x}\right) & \text{multiplicar ambos miembros por el mínimo} \\
 & & & \text{común múltiplo de los denominadores}
\end{array}
$$

De acuerdo al Teorema 3, el factor $8x$ por ser positivo no altera el sentido de la desigualdad:

$$-24+28x \quad < \quad 26x-5 \quad \text{simplificación de números racionales}$$

De acuerdo al Teorema 7, la desigualdad no se altera sumando una expresión algebraica en ambos miembros:

$$-24+28x+(24-26x) \quad < \quad 26x-5+(24-26x) \quad \text{Teorema 7}$$

$$
\begin{array}{lcll}
28x-26x & < & -5+24 & \text{suma de números racionales} \\
2x & < & 19 & \text{suma de números racionales} \\
\frac{1}{2}(2x) & < & \frac{1}{2}(19) & \text{Teorema 3} \\
x & < & \frac{19}{2} &
\end{array}
$$

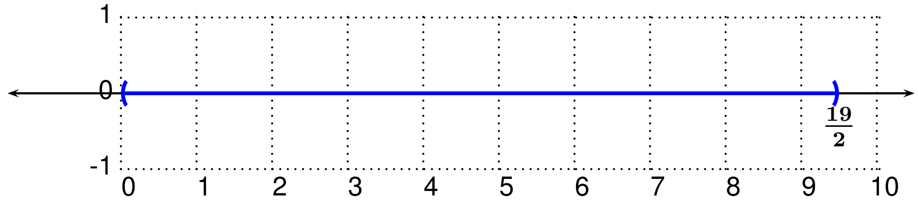
dadas las restricciones $x>0$ y $x<\frac{19}{2}$

En forma de conjunto: $S=\{x \mid x\in\mathbb{R} \ \wedge \ x>0 \ \wedge x<\frac{19}{2}\}$

o bien: $S=\{x \mid x\in\mathbb{R} \ \wedge \ 0<x<\frac{19}{2}\}$

En forma de intervalo: $S=(0,\frac{19}{2})$

En la recta numérica



Referencias

[1] Pontificia Universidad Javeriana. 2020. Expresiones Algebraicas. Desigualdades. Consultado el 12 de Diciembre de 2020, de http://proyectos.javerianacali.edu.co/cursos_virtuales/pregrado/matematicas_fundamentale

[2] Elena de Oteyza de Oteyza. 2020. Desigualdades. Consultado el 13 de Diciembre de 2020, de https://www.cimat.mx/especialidad.seg/actual/documentos/desigualdades.pdf

[3] Universidad de Puerto Rico en Bayamón. 2020. DIFERENTES ACERCAMIENTOS A LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES. Departamento de Matemáticas. Consultado el 13 de Diciembre de 2020, de http://docs.uprb.edu/deptmate/material %20suplementario/CIME/7mo %20a %209no/T3 %3

[4] Grupo de innovación ARAGÓN TRES. 2020. Números reales y números complejos. Ecuaciones e inecuaciones. Consultado el 13 de Diciembre de 2020, de https://ocw.unizar.es/ocw/pluginfile.php/925/mod_resource/content/3/T1_Teoria.pdf