Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica

ESTRUCTURA ALGEBRAICA

Especialización en Aprendizaje y Enseñanza de las Ciencias Básicas,
[EACB-0211]

UNIDAD 5. Expresiones Algebraicas.

V.7 Expresiones racionales.

Santiago de Querétaro, México
Diciembre de 2020

V.7 Expresiones racionales.

¿Qué es una expresión racional?

Una expresión racional es simplemente un cociente de dos polinomios. En otras palabras, es una fracción cuyo numerador y denominador son polinomios.

Definición
Una expresión racional es una expresión de la forma

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y donde $q(x) \neq 0$. Al igual que en las fracciones numéricas, al polinomio $p(x)$ se le llama el *numerador* y al polinomio $q(x)$ se le llama el *denominador*.

Ejemplo:

$$\frac{x}{x^2-1} \begin{cases} x \textit{ es el numerador} \\ x^2-1 \textit{ es el denominador } \forall\, x \neq \pm 1 \end{cases}$$

Estos son ejemplos de expresión racionales:

$$\frac{1}{x}\ ,\ \frac{x+5}{x^2-4x+4}\ ,\ \frac{x(x+1)(2x-3)}{x-6}$$

Es importante mencionar que el denominador de una **expresión racional** no puede ser igual a $\mathbf{0}$, puesto que la división entre $\mathbf{0}$ no está definida. Por ejemplo en la expresión $\frac{x+5}{x^2-4x+4}$, x no puede ser igual a $\mathbf{2}$; ya que el denominador tendría un valor de $\mathbf{0}$.

Al escribir una expresión racional con una variable en el denominador, normalmente suponemos que el valor o los valores de la variable que hacen al denominar igual a cero quedan excluidos. Por ejemplo, si escribimos $\frac{1}{x}$, suponemos que $x \neq 0$, aunque esto no se indique de manera específica. Por lo anterior es importante considerar el **dominio de la expresiones racionales**.

Dominio de expresiones racionales

El **dominio** de cualquier expresión es el conjunto de todos los valores posibles de entrada.

En el caso de expresiones racionales, podemos utilizar cualquier valor de entrada excepto los que hacen que el denominador sea igual a **0** (pues la división entre **0** no está definida).

En otras palabras, el **dominio de una expresión racional** incluye a todos los números reales, excepto aquellos que hacen que el denominador sea cero.

Ejemplo: encontrar el dominio de $\boldsymbol{\dfrac{(x+1)}{(x-3)(x+4)}}$

Encontremos los ceros del denominador para restringir esos valores:

$\boldsymbol{(x-3)(x+4)=0}$

$\boldsymbol{(x-3)=0}$ o bien $\boldsymbol{(x+4)=0}$ Propiedad del producto por cero

$\boldsymbol{x=3}$ o bien $\boldsymbol{x=-4}$ Despejando $\boldsymbol{x}$

Entonces podemos decir que el dominio de $\boldsymbol{\dfrac{(x+1)}{(x-3)(x+4)}}$ son todos los números reales, excepto **3** y **−4** o también puede expresarse como $\{x|x \neq 3 \ \ y \ \ x \neq -4\}$.

Ejemplo: encontrar el dominio de $\boldsymbol{\dfrac{(x^2)}{(x^2-4)}}$

Factorizar el denominador y encontrar los ceros:

$\boldsymbol{(x+2)(x-2)=0}$

$\boldsymbol{(x+2)=0}$ o bien $\boldsymbol{(x-2)=0}$ Propiedad del producto por cero

$\boldsymbol{x=-2}$ o bien $\boldsymbol{x=2}$ Despejando $\boldsymbol{x}$

Entonces podemos decir que el dominio de $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{x^2-4}}$ son todos los números reales, excepto **2** y **−2** o también puede expresarse como $\{x|x \neq 2 \ \ y \ \ x \neq -2\}$.

Ejercicio propuestos.

1) ¿Cuál es el dominio de $\dfrac{(x+1)}{(x-7)}$?

2) ¿Cuál es el dominio de $\dfrac{(3x-7)}{(2x+1)}$?

3) ¿Cuál es el dominio de $\dfrac{(2x-3)}{x(x+1)}$?

4) ¿Cuál es el dominio de $\dfrac{(x-3)}{(x^2-2x-8)}$?

5) ¿Cuál es el dominio de $\dfrac{(x+2)}{(x^2+4)}$?

Simplificación de expresiones racionales.

Una expresión racional se considera **simplificada** si el numerador y el denominador no tienen factores en común.

Podemos *simplificar* expresiones racionales de manera similar a la simplificación de fracciones numéricas. Por ejemplo, la versión simplificada de $\frac{6}{8}$ es $\frac{3}{4}$. Se puede observar que cancelamos un factor común de en el numerador y en el denominador:

$$
\begin{aligned}
\frac{6}{8} &= \frac{2\cdot 3}{2\cdot 4} && \text{Factoriza}\\
&= \frac{\cancel{2}\cdot 3}{\cancel{2}\cdot 4} && \text{cancela factores comunes}\\
&= \frac{3}{4} && \text{simplifica}
\end{aligned}
$$

La expresión racional $\frac{ab-b^2}{2b}$ no está simplificada, ya que el numerador y el denominador tienen un factor común, b. Para simplificar esta expresión, factorice b en cada término del numerador, luego cancele factores comunes y simplifique.

$$
\begin{aligned}
\frac{ab-b^2}{2b} &= \frac{b(a-b)}{2b} && \text{Factoriza}\\
&= \frac{\cancel{b}(a-b)}{2\cancel{b}} && \text{cancela factores comunes}\\
&= \frac{a-b}{2} && \text{simplifica}
\end{aligned}
$$

Ejemplos.

1) Simplificar $\frac{x^2+3x}{x^2+5x}$

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2+3x}{x^2+5x} &= \frac{x(x+3)}{x(x+5)} && \text{Factoriza numerador y denominador}\\
& x \neq 0 \;\; y \;\; x \neq -5 && \text{Verificar valores restringidos}\\
& \{x | x \neq 0 \;\; y \;\; x \neq -5\} && \text{establecer el dominio de la expresión}\\
&= \frac{\cancel{x}(x+3)}{\cancel{x}(x+5)} && \text{cancela factores comunes}\\
&= \frac{(x+3)}{(x+5)} \;\; \textit{para } x \neq 0 && \text{simplifica}
\end{aligned}
$$

Proceso de simplificación de expersiones racionales.

Paso 1: factorizar el numerador y el denominador.

Paso 2: establecer el dominio de la expresión

Paso 3: cancelar factores comunes

Paso 4: simplificar y especificar cualquier otro valor restringido que no aparezca en la expresión

Ejercicio propuestos.

1) Simplificar $\dfrac{6x+20}{2x+10}$

2) Simplificar $\dfrac{(x^3-3x^2)}{(4x^2-5x)}$

Ejemplo 2:

2) Simplificar $\dfrac{x^2-9}{x^2+5x+6}$

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2-9}{x^2+5x+6} &= \frac{(x+3)(x-3)}{(x+2)(x+3)} && \text{Factoriza numerador y denominador}\\
& x \neq -2 \text{ y } x \neq -3 && \text{Verificar valores restringidos}\\
& \{x|x \neq -2 \text{ y } x \neq -3\} && \text{establecer el dominio de la expresión}\\
&= \frac{\cancel{(x+3)}(x-3)}{(x+2)\cancel{(x+3)}} && \text{cancela factores comunes}\\
&= \frac{(x-3)}{(x+2)} \ \ \scriptstyle{para\ \ x \neq -3 \ \text{ y } \ x \neq -2} && \text{simplifica}
\end{aligned}
$$

3) Simplificar $\dfrac{x^2+5x+4}{x+4}$

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2+5x+4}{x+4} &= \frac{(x+4)(x+1)}{x+4} && \text{Factoriza numerador y denominador}\\
& x \neq -4 && \text{Verificar valores restringidos}\\
& \{x|x \neq -4\} && \text{establecer el dominio de la expresión}\\
&= \frac{\cancel{(x+4)}(x+1)}{\cancel{x+4}} && \text{cancela factores comunes}\\
&= x+1 \ \ para \ \ x \neq -4 && \text{simplifica}
\end{aligned}
$$

4) Simplificar $\dfrac{\mathbf{27x^3-8}}{\mathbf{2-3x}}$

$$\begin{aligned}
\frac{27x^3-8}{2-3x} &= \frac{(3x)^3-(2x^3)}{2-3x} && \text{Especificar el numerador como} \\
& && \text{una diferencia de cubos} \\
&= \frac{(3x-2)(9x^2+6x+4)}{2-3x} && \text{Factoriza numerador y denominador} \\
& x \neq (2/3) && \text{Verificar valores restringidos} \\
& \{x|x \neq (2/3)\} && \text{establecer el dominio de la expresión} \\
&= \frac{(3x-2)(9x^2+6x+4)}{-1(3x-2)} && \text{factoriza -1 en el denominador} \\
&= \frac{\cancel{(3x-2)}(9x^2+6x+4)}{-1\cancel{(3x-2)}} && \text{cancela factores comunes} \\
&= \frac{(9x^2+6x+4)}{-1} \quad para \quad x \neq (2/3) && \text{simplifica} \\
&= -9x^2-6x-4 \quad para \quad x \neq (2/3) && \text{o bien}
\end{aligned}$$

Simplificación de expresiones racionales con un denominador común.

Al sumar o restar dos expresiones racionales con un denominador común, sumamos o restamos los numeradores y conservamos el denominador común.

Para sumar o restar expresiones racionales, puede utilizar las siguientes reglas:

Suma	*Resta*
$\frac{a}{c}+\frac{a}{c}=\frac{a+b}{c}\ , c\neq 0$	$\frac{a}{c}-\frac{a}{c}=\frac{a-b}{c}\ , c\neq 0$

1. Sume o reste los numeradores, tal como lo indican las expresiones anteriores
2. Si es posible, simplifique las expresiones

Ejemplos.

1) Sumar $\frac{3}{x+6}+\frac{x-4}{x+6}$

$$\frac{3}{x+6}+\frac{x-4}{x+6} = \frac{3+(x-4)}{(x+6)} \qquad \text{Sumar numeradores}$$

$$= \frac{x-1}{x+6} \qquad \text{reducir términos}$$

$$x\neq -6 \qquad \text{Verificar valores restringidos}$$

$$\{x|x\neq -6\} \qquad \text{establecer el dominio de la expresión}$$

$$= \frac{x-1}{x+6}\ \ \textit{para}\ x\neq -6$$

2) Sumar $\frac{x^2+3x-2}{(x+5)(x-3)}+\frac{4x+12}{(x+5)(x-3)}$

$$\frac{x^2+3x-2}{(x+5)(x-3)}+\frac{4x+12}{(x+5)(x-3)} = \frac{x^2+3x-2+(4x+12)}{(x+5)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2+7x+10}{(x+5)(x-3)}$$

$$x\neq -5 \ \text{ y } \ x\neq 3$$

$$\{x|x\neq -5 \ \text{ y } \ x\neq 3\} \qquad \text{dominio de la e}$$

$$= \frac{\cancel{(x+5)}(x+2)}{\cancel{(x+5)}(x-3)}$$

$$= \frac{x+2}{x-3}\ \ \textit{para}\ x\neq -5 \ \text{ y } \ x\neq 3$$

3) Restar $\dfrac{a}{a-6} - \dfrac{a^2-4a-6}{a-6}$

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{a-6} - \frac{a^2-4a-6}{a-6} &= \frac{a-(a^2-4a-6)}{a-6} && \text{Restar numeradores}\\
&= \frac{a-a^2+4a+6}{a-6} \\
&= \frac{-a^2+5a+6}{a-6} && \text{Reducir términos semejantes}\\
& a \neq 6 \\
& \{a|a \neq 6\} && \text{dominio de la expresión}\\
&= \frac{-1(a^2-5a-6)}{a-6} && \text{Factorizar con -1}\\
&= \frac{-1[(a-6)(a+1)]}{a-6} && \text{Factorizar numerador}\\
&= \frac{-1[\cancel{(a-6)}(a+1)]}{\cancel{a-6}} && \text{cancelar factores}\\
&= -(a+1) \quad \textit{para } a \neq 6 \\
& o \quad -a-1 \quad \textit{para } a \neq 6
\end{aligned}
$$

Referencias

[1] Universidad de Puerto Rico. 2020. Expresiones Racionales. Consultado el 1 de Diciembre de 2020, de http://quiz.uprm.edu/tutorials_master/ratexp/ratexpesp_home.html

[2] Khan Academy. 2020. Introducción a las expresiones racionales. Consultado el 23 de Noviembre de 2020, de https://es.khanacademy.org/math/algebra2/cancel-common-factor/a/intro-to-rational-expressions

[3] Centro de Investigación en Matemáticas AC. 2020. Expresiones racionales y ecuaciones. Cursos de matemáticas en el CIMAT para alumnos de bachillerato. Consultado el 13 de Noviembre de 2020, de https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/algebra_angel_cap6.pdf