Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica

**ESTRUCTURA ALGEBRAICA**

Especialización en Aprendizaje y Enseñanza de las Ciencias Básicas,
[EACB-0211]
**UNIDAD 5. Expresiones Algebraicas.**
**V.6 Factorización.**

Santiago de Querétaro, México
Diciembre de 2020

## V.6 Factorización.

En matemáticas la **factorización** es una técnica que consiste en la descomposición en factores de una *expresión algebraica* (que puede ser un número, una suma o resta, una matriz, un polinomio, etc.) en forma de producto. Existen distintos métodos de factorización, dependiendo de los objetos matemáticos estudiados; el objetivo es *simplificar* una expresión o reescribirla en términos de «bloques fundamentales», que reciben el nombre de **factores**, como por ejemplo factorizar un número en *números primos*, o un polinomio en *polinomios irreducibles.*

El *teorema fundamental de la aritmética* cubre la *factorización de números enteros*, y para la factorización de polinomios aplica el *teorema fundamental del álgebra.*

**Ejemplo simple de factorización**:

Supongamos ahora que tenemos que pagar un artículo que cuesta 52 pesos y sólo tenemos un billete de $500. Entonces, para determinar cuánto cambio recibiremos podemos "factorizar" de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{500-52} &= \mathbf{400+100-52} \\ &= \mathbf{400+(100-52)} \\ &= \mathbf{400+48} \\ &= \mathbf{448} \end{aligned}$$

En álgebra, la **factorización de polinomios** se utiliza para simplificar la tarea de encontrar la solución de ecuaciones, simplificar expresiones y en general para facilitar su manipulación. Existen varios métodos para factorizar polinomios, a continuación veremos los más comunes.

## Factor común (Monomio como factor común).

Encontrando, por inspección, el monomio que es el *máximo común divisor* de todos los términos del polinomio y factorizándolo como un factor común, aplicando de la *propiedad distributiva*, se escogen los término que tengan el menor exponente.

**Ejemplos**: Factorizar los siguientes polinomios.

1. $\boldsymbol{4a^3b+10a^2b^2}$

   Por inspección, el monomio que representa el MCD es $\boldsymbol{(2a^2b)}$; entonces:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{4a^3b+10a^2b^2} &= \boldsymbol{(2a^2b)(2a)+(2a^2b)(5b)} \\ &= \boldsymbol{(2a^2b)(2a+5b)} \end{aligned}$$

2. $\boldsymbol{6x^3y^2 + 8x^4y^3 - 10x^5y^3}$

En este caso, el monomio que representa el MCD es $\boldsymbol{(2x^3y^2)}$; entonces:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{6x^3y^2 + 8x^4y^3 - 10x^5y^3} &= \boldsymbol{(2x^3y^2)3 + (2x^3y^2)(4xy) - (2x^3y^2)(5x^2y)} \\ &= \boldsymbol{(2x^3y^2)(3 + 4xy - 5x^2y)}\end{aligned}$$

## Factorización de polinomios por agrupación de términos.

La factorización por agrupación se realiza mediante la selección de los términos en el polinomio en dos o más grupos, donde cada grupo se puede factorizar mediante un método conocido. Los resultados de estas factorizaciones parciales se pueden combinar, algunas veces, para dar una factorización de la expresión original.

**Ejemplos**: Factorizar los siguientes polinomios.

**a)** $\boldsymbol{4x^2 + 20x + 3xy + 15y}$:

1. Agrupar los términos similares, $\boldsymbol{(4x^2 + 20x) + (3xy + 15y)}$
2. Factorizar por el *MCD* en cada agrupación, $\boldsymbol{4x(x+5) + 3y(x+5)}$
3. Factorizar el factor común del binomio, $\boldsymbol{(x+5)(4x+3y)}$

**b)** $\boldsymbol{5x^4y + 3x^2y - 9xz - 15x^3z}$:

1. Agrupar los términos similares, $\boldsymbol{(5x^4y + 3x^2y) + (-9xz - 15x^3z)}$
2. Factorizar por el *MCD* en cada agrupación, $\boldsymbol{x^2y(5x^2+3) - 3xz(3+5x^2)}$
3. Factorizar el factor común del binomio, $\boldsymbol{(5x^2+3)(x^2y - 3xz)}$

**c)** $\boldsymbol{2ab + 2a - b - 2ac + c - 1}$:

1. Agrupar los términos similares, $\boldsymbol{2ab - b - 2ac + c + 2a - 1}$
2. Factorizar por el *MCD* en cada agrupación, $\boldsymbol{b(2a-1) - c(2a-1) + (2a-1)}$
3. Factorizar el factor común del binomio, $\boldsymbol{(2a-1)(b-c+1)}$

## Otra forma de factorización de polinomios por agrupación de términos es:

Las expresiones de la forma $\boldsymbol{Ax^2+Bx+C}$ se pueden factorizar por agrupación. De manera general para factorizar este tipo de polinomios hay que encontrar dos números $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tal que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{ab} &= \boldsymbol{AC} \\ \boldsymbol{a+b} &= \boldsymbol{B} \end{aligned}$$

Por ejemplo, si tenemos el polinomio $\mathbf{9}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{41}\boldsymbol{x} - \mathbf{20}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{ab} &= \mathbf{(9)(-20)} \\ \boldsymbol{ab} &= \mathbf{-180} \\ \boldsymbol{a+b} &= \mathbf{-41} \end{aligned}$$

Tenemos que encontrar $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, la lista de los factores de $\mathbf{-180}$. Los factores que sumen $\mathbf{-41}$ serán $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Los factores de 180 son: (2)(2)(3)(3)(5); entonces cuando $\boldsymbol{a}$ es 4 y $\boldsymbol{b}$ es -45 se cumple que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{ab} &= \mathbf{(9)(-20)} \\ \boldsymbol{ab} &= \mathbf{-180} \\ \boldsymbol{a+b} &= \mathbf{(4)+(-45)} \\ \boldsymbol{a+b} &= \mathbf{-41} \end{aligned}$$

Ahora hay que reescribir el polinomio para que tenga la forma :

$$\mathbf{9}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + (\mathbf{4}\boldsymbol{x} - \mathbf{45}\boldsymbol{x}) - \mathbf{20}$$

Por inspección, agrupar términos:

$$(\mathbf{9}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{4}\boldsymbol{x}) + (-\mathbf{45}\boldsymbol{x} - \mathbf{20})$$

Factorizar el MCD en cada grupo:

$$\boldsymbol{x}(\mathbf{9}\boldsymbol{x} + \mathbf{4}) - \mathbf{5}(\mathbf{9}\boldsymbol{x} + \mathbf{4})$$

Factorizar el factor común del binomio:

$$(\mathbf{9}\boldsymbol{x} + \mathbf{4})(\boldsymbol{x} - \mathbf{5})$$

## Diferencia de dos cuadrados.

Una diferencia de cuadrados es el resultado del producto de dos binomios conjugados:

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$

Lo cual implica que para factorizar una diferencia de cuadrados, se extraen las raíces cuadradas de los términos y se forma un binomio. Finalmente se expresa el producto de este binomio por su conjugado.

**Ejemplos. Factorizar las siguientes expresiones:**

**1)** $\boldsymbol{x^2 - 4}$

Se extraen las raíces de los términos:

$\boldsymbol{\sqrt{x^2} = x}$

$\boldsymbol{\sqrt{4} = 2}$

se forma el binomio: $\boldsymbol{(x+2)}$ y se multiplica por su conjugado:

$\boldsymbol{(x+2)(x-2)}$

por lo cual: $\boldsymbol{x^2 - 4 = (x+2)(x-2)}$

**2)** $\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2 - x^2 + 2xy - y^2}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2 - x^2 + 2xy - y^2} &= \boldsymbol{(a^2 + 2ab + b^2) - (x^2 - 2xy + y^2)} \\
&= \boldsymbol{(a+b)^2 - (x-y)^2} \\
&= \boldsymbol{[(a+b) + (x-y)][(a+b) - (x-y)]} \\
&= \boldsymbol{(a+b+x-y)(a+b-x+y)}
\end{aligned}$$

## Factorización de un Trinomio cuadrado perfecto.

Una cantidad es cuadrado perfecto cuando es el producto de dos factores iguales, es decir, es el cuadrado de otra cantidad. Por ejemplo, $\boldsymbol{9a^2}$ es cuadrado perfecto, ya que es el cuadrado de $\boldsymbol{3a}$.

Se conoce como trinomio cuadrado perfecto (TCP) al resultado que se obtiene de elevar al cuadrado un binomio:

$$\underbrace{\boldsymbol{(a+b)^2}}_{\text{Cuadrado de un binomio}} \quad = \quad \underbrace{\boldsymbol{a^2+2ab+b^2}}_{\text{Trinomio cudrado perfecto}}$$

Para identificar si un trinomio es cuadrado perfecto, se debe cumplir que dos de sus términos sean cuadrados perfectos y que el otro término corresponda al doble producto de las raíces cuadradas de los términos cuadráticos.

**Ejemplos. Determinar si los siguientes trinomios son cuadrados perfectos:**

1) $\boldsymbol{16x^2+40xy+25y^2}$

Primero se comprueba que dos términos sean cuadrados perfectos:

$\boldsymbol{\sqrt{16x^2}=4x}$

$\boldsymbol{\sqrt{25y^2}=5y}$

y que el doble producto de las raíces cuadradas debe ser igual al otro término:

$\boldsymbol{2(4x)(5y)=40xy}$

por lo tanto el trinomio, es un TCP y la factorización queda:

$\boldsymbol{16x^2+40xy+25y^2=(4x+5y)^2}$

2) $\boldsymbol{w^4-8w^2z^3+16z^6}$

Se comprueba que dos términos sean cuadrados perfectos:

$\boldsymbol{\sqrt{w^4}=\pm w^2}$

$\boldsymbol{\sqrt{16z^6}=\pm 4z^3}$

y que el doble producto de las raíces cuadradas debe ser igual al otro término:

$\boldsymbol{2(-w^2)(4z^3)=-8w^2z^3}$

$\boldsymbol{2(w^2)(-4z^3)=-8w^2z^3}$

por lo tanto el trinomio, es un TCP y la factorización queda:

$\boldsymbol{(w^2-4z^3)^2}$ o bien $\boldsymbol{(4z^3-w^2)^2}$

## Factorización del cubo de un binomio (Suma o diferencia de cubos).

Una cantidad es cubo perfecto cuando es el producto de tres factores iguales, es decir, es el cubo de otra cantidad. Por ejemplo, $\boldsymbol{125x^3}$ es cubo perfecto, ya que es el cubo de $\boldsymbol{5x}$.

El cubo de un binomio es de la forma:

$$\boldsymbol{(x+y)^3} \quad = \quad \boldsymbol{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$$

y cumple las siguientes características:

- Posee cuatro términos.
- El primero como el último término son cubos perfectos.
- El segundo término es el triple producto del cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del último.
- El tercer término es el triple producto de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del último.

Para verificar que la factorización de una expresión de cuatro términos es el cubo de un binomio se debe proceder de la siguiente manera:

1. Se ordena el polinomio en forma descendente o ascendente respecto a una literal.
2. Se extrae la raíz cúbica del primer y último términos del polinomio.
3. Se observa si todos los signos son iguales o si se alternan.
4. Se triplica el cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del último y se compara con el segundo término del polinomio dado.
5. Se triplica la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del último y se compara con el tercer término de la expresión.
6. Si las dos comparaciones hechas en los pasos previos son iguales, se trata del desarrollo del cubo de un binomio y se factoriza así: se forma un binomio con las raíces cúbicas del primer y último término del polinomio, con los signos que se obtengan (si todos los signos son iguales) o por el signo menos (si los signos se alternan). Finalmente, se eleva el binomio al cubo.

**Ejemplos. Factorizar los siguientes polinomios:**

1) $\boldsymbol{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}$

Se extraen las raíces cúbicas de los términos extremos:

$\boldsymbol{\sqrt{k^3} = k}$

$\boldsymbol{\sqrt{1^3} = 1}$

El triple producto del cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del último es:

$\boldsymbol{3(k^2)(1) = 3k^2}$

El triple producto de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del último es:

$\boldsymbol{3(k)(1^2) = 3k}$, que es igual al tercer término.

Dado que todos los signos son positivos, el binomio al cubo formado por las raíces cúbicas de los extremos es: $\boldsymbol{(k+1)^3}$

entonces: $\boldsymbol{k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3}$

2) $\boldsymbol{8q^9 - p^6 + 6q^3p^4 - 12q^6p^2}$

Se ordena el polinomio con respecto: $\boldsymbol{q}$

$\boldsymbol{8q^9 - 12q^6p^2 + 6q^3p^4 - p^6}$

Se extraen las raíces cúbicas de los términos extremos:

$\boldsymbol{\sqrt[3]{8q^9} = 2q^3}$

$\boldsymbol{\sqrt[3]{-p^6} = -p^2}$

El triple producto del cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del último es:

$\boldsymbol{3(2q^3)^2(-p^2) = -12q^6p^2}$, el cual es igual al segundo término

El triple producto de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del último es:

$\boldsymbol{3(2q^3)(-p^2)^2 = 6q^3p^4}$, que es igual al tercer término.

Dado que los signos se alternan, el binomio al cubo formado por las raíces cúbicas de los extremos es: $\boldsymbol{(2q^3 - p^2)^3}$

entonces: $\boldsymbol{8q^9 - 12q^6p^2 + 6q^3p^4 - p^6 = (2q^3 - p^2)^3}$

## Suma o diferencia de dos potencias n-ésimas.

Las factorizaciones n-ésima de diferencias y sumas de potencias se pueden ampliar a cualquier potencia entera positiva $\boldsymbol{n}$.

Para cualquier $\boldsymbol{n}$, una factorización general es:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1})$$
$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}b^i$$

La fórmula correspondiente para la suma de dos potencias n-ésimas depende de si $\boldsymbol{n}$ es par o impar. Si $\boldsymbol{n}$ es impar, $\boldsymbol{b}$ *puede* se reemplazado por $-\boldsymbol{b}$ en la fórmula anterior, para obtener:

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - ba^{n-2} + b^2a^{n-3} - \cdots - b^{n-2}a + b^{n-1})$$

Si $\boldsymbol{n}$ es par, consideramos dos casos:

1. Si $\boldsymbol{n}$ es una potencia de 2 entonces $a^n + b^n$ no se puede factorizar (más precisamente, irreducible sobre los números racionales).
2. De otra manera, $n = m \cdot 2^k, m > 1, k > 0$ donde $\boldsymbol{m}$ es impar. En este caso tenemos,

$$a^n + b^n = (a^{2^k} + b^{2^k})(a^{n-2^k} - a^{n-2\cdot 2^k}b^{2^k} + a^{n-3\cdot 2^k}b^{2\cdot 2^k} - \cdots - a^{2^k}b^{n-2\cdot 2^k} + b^{n-2^k})$$

# Referencias


[1] Wikipedia. 2020. Factorización. Consultado el 13 de Noviembre de 2020, de https://es.wikipedia.org/wiki/Factorización

[2] Oscar Escamilla González. 2020. Factorización. Universidad Autónoma Metropolitana. Consultado el 23 de Noviembre de 2020, de http://campusvirtual.cua.uam.mx/material/tallerm/05_Factorizacion_html/index.html#

[3] Pontificia Universidad Javeriana. 2020. Expresiones Algebraicas, potenciación y radicación. Consultado el 13 de Noviembre de 2020, de http://proyectos.javerianacali.edu.co/cursos_virtuales/pregrado/matematicas_fundamentale

[4] José Manuel Becerra Espinosa PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN. Colegio de Matemáticas de la ENP-UNAM. Consultado el 13 de Noviembre de 2020, de http://dgenp.unam.mx/direccgral/secacad/cmatematicas/pdf/m4unidad05.pdf