Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica

ESTRUCTURA ALGEBRAICA

Especialización en Aprendizaje y Enseñanza de las Ciencias Básicas,
[EACB-0211]
UNIDAD 5. Expresiones Algebraicas.
V.5 Productos Notables.

Santiago de Querétaro, México
Noviembre de 2020

V.5 Productos Notables.

Definición 6
Los productos notables son multiplicaciones especiales entre expresiones algebraicas, que por sus cualidades destacan del resto de las multiplicaciones. Las características que hacen que un producto sea notable, es que se cumplen ciertas reglas, tal que el resultado puede ser obtenido mediante una simple inspección, sin la necesidad de verificar o realizar la multiplicación paso a paso.

Los productos notables que se examinaremos son:

- Binomio al cuadrado
- Binomio conjugado

Nomenclatura algebraica relacionada.

Las expresiones algebraicas reciben nombres especiales dependiendo del número de términos que contengan:

i) se les llama **monomios** cuando contienen un término, por ejemplo:
$\boldsymbol{x, \; -y, \; x^2, \; 5x^2y^3, -\frac{1}{2z}}$, etc;

ii) se les llama **binomios** cuando contienen dos términos, por ejemplo:
$\boldsymbol{x+y, (zx-3y)^2, \; x^2+y^2, \frac{1}{2x} - \frac{2}{3x^2}}$;

iii) se les llama **trinomios** cuando poseen tres términos, por ejemplo:
$\boldsymbol{x+y+z, -x^2+x^3-x^4, (3x+2y+10xy)^4}$.

En general cuando una expresión tiene más de tres términos se le suele llamar *polinomio*.
Sin embargo, también los **monomios**, **binomios** y **trinomios** son polinomios; el vocablo 'polinomio' es independiente del número de términos que posea.

Cómo obtener los productos notables.

Si múltiplicamos dos binomios $\boldsymbol{(ax+by)}$ y $\boldsymbol{(cy+dy)}$ el producto obtenido corresponde a multiplicar cada término del primer binomio por los terminos del segundo.

$$\boldsymbol{(ax+by)(cx+dy) = axcx + axdy + bycx + bydy}$$

Simplificando y agrupando términos semejantes tenemos:

$$\boldsymbol{(ax+by)(cx+dy) = acx^2 + (ad+bc)xy + bdy^2}$$

Ejemplos:

Mutiplicar $(\boldsymbol{5x+3y})$ por $(\boldsymbol{7x+5y})$

Solución:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{5x+3y})(\boldsymbol{7x+5y}) &= \boldsymbol{35x^2+25xy+21yx+15y^2}\\ &= \boldsymbol{35x^2+(25+21)xy+15y^2}\\ &= \boldsymbol{35x^2+46xy+15y^2}\end{aligned}$$

Cuadrado de un binomio con el segundo término positivo.

Si múltiplicamos el binomios $\boldsymbol{ax+by}$ por si mismo obtenemos el siguiente producto.

$$(\boldsymbol{ax+by})(\boldsymbol{ax+by}) = \boldsymbol{axax+axby+byax+byby}$$

Simplificando y agrupando términos semejantes tenemos:

$$(\boldsymbol{ax+by})(\boldsymbol{ax+by}) = (\boldsymbol{ax})^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{2axby} + (\boldsymbol{by})^{\boldsymbol{2}}$$

Se observa que **el cuadrado de la suma de un binomio; es el cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término**.

Cuadrado de un binomio con el segundo término negativo.

Si múltiplicamos el binomios $\boldsymbol{ax-by}$ por si mismo obtenemos el siguiente producto.

$$(\boldsymbol{ax-by})(\boldsymbol{ax-by}) = \boldsymbol{axax-axby-byax+byby}$$

Simplificando y agrupando términos semejantes tenemos:

$$(\boldsymbol{ax+by})(\boldsymbol{ax+by}) = (\boldsymbol{ax})^{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{2}(\boldsymbol{axby}) + (\boldsymbol{by})^{\boldsymbol{2}}$$

Entonces podemos decir que:

Se observa que **el cuadrado de la resta de un binomio; es el cuadrado del primer término, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término**.

Formula general del binomio al cuadrado.

$$(ax \pm by)^2 = (ax)^2 \pm 2(ax)(by) + (by)^2$$

Y se le conoce como **binomio al cuadrado**:

Binomio con un término común.

i) Producto de dos binomios con un término común:

Qué sucede si multiplicamos los binomios $(cx + a)$ y $(cx + b)$, cuyo término común es cx:

$$(cx + a)(cx + b) = cxcx + cxb + acx + ab$$

Simplificando y agrupando términos semejantes tenemos:

$$(cx + a)(cx + b) = (cx)^2 + (b + a)cx + ab$$

ii) Producto de dos binomios con un mismo término constante (o independiente):

Ahora si multiplicamos los binomios $(ax + c)$ y $(bx + c)$, cuyo término constante o independiente es c:

$$(ax + c)(bx + c) = axbx + axc + cbx + cc$$

Simplificando y agrupando términos semejantes tenemos:

$$(ax + c)(bx + c) = abx^2 + (a + b)cx + c^2$$

Aplicando la propiedad conmutativa de la suma

$$(c + ax)(c + bx) = c^2 + (a + b)cx + abx^2$$

Entonces podemos afirmar que: **El producto de dos binomios con un término común; es el cuadrado del término común más el producto de la suma de los términos no comunes y el término común, más el producto de los términos no cumunes**.

Binomio conjugado.

Si múltiplicamos dos binomios que difieren únicamente en el signo de uno de sus términos, es decir, $\boldsymbol{(ax+by)}$ por su binomio conjugado $\boldsymbol{(ax-by)}$; obtenemos el siguiente producto.

$$\boldsymbol{(ax+by)(ax-by)=axax-axby+byax-byby}$$

Simplificando y reduciendo términos semejantes tenemos:

$$\boldsymbol{(ax+by)(ax-by)=(ax)^2-(by)^2}$$

Se observa que **el producto de dos binomios que difieren únicamente en el signo de uno de sus términos; es el cuadrado del término con igual signo menos el cuadrado del término con signo diferente**.

A este producto notable se le conoce como **diferencia de cuadrados**.

Ejemplos:

Calcular la potencia de los siguientes binomios

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2 \\
\\
(x-y)^2 &= (x-y)(x-y) \\
&= xx-xy-yx+yy \\
&= x^2-2xy+y^2 \\
\\
(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)^2 \\
&= (x+y)(x^2+2xy+y^2) \\
&= xx^2+x2xy+xy^2+yx^2+y2xy+yy^2 \\
&= x^3+2x^2y+xy^2+yx^2+2xy^2+y^3 \\
&= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
\\
(x-y)^3 &= (x-y)(x-y)^2 \\
&= (x-y)(x^2-2xy+y^2) \\
&= xx^2-x2xy+xy^2-yx^2+y2xy-yy^2 \\
&= x^3-2x^2y+xy^2-yx^2+2xy^2-y^3 \\
&= x^3-3x^2y+3xy^2-y^3 \\
\\
(x+y)^4 &= (x+y)(x+y)^3 \\
&= (x+y)(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) \\
&= xx^3+x3x^2y+x3xy^2+xy^3+yx^3+y3x^2y+y3xy^2+yy^3 \\
&= x^4+3x^3y+3x^2y^2+xy^3+yx^3+3x^2y^2+3xy^3+y^4 \\
&= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4
\end{aligned}
$$

Binomio de Newton (Teorema del binomio).

El teorema del binomio, también llamado *binomio de Newton*, expresa la enésima potencia de un binomio como un polinomio. El desarrollo del binomio $(x+y)^n$ posee singular importancia ya que aparece con mucha frecuencia en matemáticas y posee diversas aplicaciones en otras áreas del conocimiento.

Si el binomio de la forma $(x+y)$ se multiplica sucesivamente por si mismo se obtienen las siguientes potencias:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^1 &= x+y \\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 \\
(x+y)^5 &= x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5 \\
(x+y)^6 &= x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6
\end{aligned}
$$

Podemos observar que:

- El desarrollo de $(x+y)^n$ tiene $n+1$ términos.
- El exponente de x inicia con n en el primer término y va disminuyendo en uno con cada término, hasta cero en el último.
- El exponente de y inicia con *cero* en el primer término y va aumentando en uno con cada término, hasta n en el último.
- Para cada término la suma de los exponentes de x y y es n.
- El coeficiente del primer término es uno y el del segundo es n.
- El coeficiente de un término cualquiera es igual al producto del coeficiente del término anterior por el exponente de x dividido entre el número que indica el orden de ese término.
- Los términos que equidistan de los extremos tienen coeficientes iguales.

Ejemplo: El coeficiente de un término cualquiera es igual al producto del coeficiente del término anterior por el exponente de x dividido entre el número que indica el orden de ese término.

$$
\begin{array}{lccccccccc}
(x+y)^6 & = & x^6 & +6x^5y & +15x^4y^2 & +20x^3y^3 & +15x^2y^4 & +6xy^5 & +y^6 \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
coeficientes & & 1 & \frac{1(6)}{1} & \frac{6(5)}{2} & \frac{15(4)}{3} & \frac{20(3)}{4} & \frac{15(2)}{5} & \frac{6(1)}{6}
\end{array}
$$

Aplicando las consideraciones expuestas, en los incisos, para el caso general se tiene:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1(2)}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1(2)(3)}x^{n-3}y^3 + \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1(2)(3)(4)}x^{n-4}y^4 + \cdots + y^n
\end{aligned}
$$

Si se introduce la notación factorial, la fórmula general del binomio puede escribirse así:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^{n-4}y^4 + \cdots + y^n
\end{aligned}
$$

Triángulo de Pascal.

El triángulo de Pascal es un esquema que tiene como característica que cada uno de los componentes de sus filas representa los coeficientes del desarrollo binomial.

Se construye de la siguiente manera: Se empieza por el 1 en el vértice superior. De una fila a la siguiente se escriben los números desfasados un lugar o casilla. Cada extremo de la fila tiene un 1 y el valor que se escribe en una casilla es la suma de los números que están encima. A continnuación se muestra la gráfica

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
(x+y)^0 & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
(x+y)^1 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
(x+y)^2 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
(x+y)^3 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
(x+y)^4 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
(x+y)^5 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
(x+y)^6 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
(x+y)^7 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Referencias

[1] Daniel de la Heras. 2020. Concepto de expresión algebraica. Consultado el 13 de Noviembre de 2020, de https://www.geogebra.org/m/SZn32Aww

[2] Joel Espinosa Longi. 2020. Productos notables. Universidad Autónoma Metropolitana. Consultado el 23 de Noviembre de 2020, de http://prometeo.matem.unam.mx/recursos/Licenciatura/TallerMate_UAM_CUAJIMALPA

[3] Pontificia Universidad Javeriana. 2020. Expresiones Algebraicas, potenciación y radicación. Consultado el 13 de Noviembre de 2020, de http://proyectos.javerianacali.edu.co/cursos_virtuales/pregrado/matematicas_fundamentale

[4] José Manuel Becerra Espinosa PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN. Colegio de Matemáticas de la ENP-UNAM. Consultado el 13 de Noviembre de 2020, de http://dgenp.unam.mx/direccgral/secacad/cmatematicas/pdf/m4unidad05.pdf