Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica

ESTRUCTURA ALGEBRAICA

Especialización en Aprendizaje y Enseñanza de las Ciencias Básicas,
[EACB-0211]

UNIDAD 5. Expresiones Algebraicas.

V.3 Radicales.

Santiago de Querétaro, México
Noviembre de 2020

V.3 Radicales.

Definición 5

Si $\boldsymbol{n}$ es un número entero positivo ($\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^{+}$), se define $\boldsymbol{a}^{1/n}$ como la raíz *n-ésima* de $\boldsymbol{a}$. Es decir que

$$\boldsymbol{a}^{1/n} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \qquad \text{y si} \qquad \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b}; \quad \textit{significa que} \quad \boldsymbol{b}^{n} = \boldsymbol{a}$$

Se tienen las siguientes dos condiciones:

a) Si $\boldsymbol{n}$ es un número entero par; entonces $\boldsymbol{a}$ debe ser estrictamente mayor o igual que cero, para tener la seguridad de que la expresión $\boldsymbol{a}^{1/n} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$ sea un número real, esto es:

$$\text{Si} \quad \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^{+} \ \wedge \ \boldsymbol{n} = \boldsymbol{2x} \ \forall \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^{+}, \quad \boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{0}; \qquad (\boldsymbol{a}^{1/n} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}}) \in \mathbb{R}, \quad \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \geq 0$$

b) Si $\boldsymbol{n}$ es un número entero impar; y $\boldsymbol{a}$ puede tomar cualquier valor dentro de los números reales; entonces la expresión $\boldsymbol{a}^{1/n} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$ siempre sigue siendo un numero real, esto es:

$$\text{Si} \quad \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^{+} \ \wedge \ \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{2x+1}) \ \forall \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^{+}, \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}; \qquad (\boldsymbol{a}^{1/n} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}}) \in \mathbb{R}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{-\mathbf{8}} = -2 \quad \text{para el caso} \quad \boldsymbol{n} = \mathbf{3} \in \mathbb{Z}^{+} \ \wedge \ \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{2x+1}) \ \forall \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^{+}, \quad -\mathbf{8} \in \mathbb{R}; \quad -\mathbf{2} \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[4]{\mathbf{16}} = 2 \quad \text{para el caso} \quad \boldsymbol{n} = \mathbf{4} \in \mathbb{Z}^{+} \ \wedge \ \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{2x}) \ \forall \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^{+}, \quad \mathbf{16} \geq \mathbf{0}; \quad \mathbf{2} \geq \mathbf{0}$$

$$\sqrt[2]{-\mathbf{4}} = \quad \text{para este caso} \quad \boldsymbol{n} = \mathbf{2} \in \mathbb{Z}^{+} \ \wedge \ \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{2x}) \ \forall \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^{+}, \quad -\mathbf{4} \leq \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{resultado} \notin \mathbb{R}$$

Reglas de los Radicales.

1. $\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{ab}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\ \sqrt[n]{\boldsymbol{b}}\,\right)$ En esta igualdad cada expresión representa un número real, es decir se deben cumplir las condiciones adecuadas sobre $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ para que esto se cumpla.

2. $\left(\sqrt[n]{\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} = \dfrac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}}\right)$ Como en el caso anterior en esta igualdad cada expresión representa un número real, es decir se deben cumplir las condiciones adecuadas sobre $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ para que esto se cumpla.

3. $\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\,\right)^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}$ En esta propiedad $\boldsymbol{n} > 0$ y si $\boldsymbol{n}$ es par; $\boldsymbol{a}$ tiene que ser estrictamente mayor o igual cero, si $\boldsymbol{n}$ es impar no hay restricciones sobre $\boldsymbol{a}$, es decir $(\boldsymbol{a} \in \mathbb{R})$.

4. $\sqrt[n]{(\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}}} = \begin{cases} \boldsymbol{a} & \text{si } \boldsymbol{n} \text{ es impar} \\ |\boldsymbol{a}| & \text{si } \boldsymbol{n} \text{ es par} \end{cases}$

Referencias

[1] Daniel de la Heras. 2020. Concepto de expresión algebraica. Consultado el 13 de Noviembre de 2020, de https://www.geogebra.org/m/SZn32Aww

[2] Pontificia Universidad Javeriana. 2020. Expresiones Algebraicas. Consultado el 13 de Noviembre de 2020, de http://proyectos.javerianacali.edu.co/cursos_virtuales/pregrado/matematicas_fundamentale

[3] Pontificia Universidad Javeriana. 2020. Expresiones Algebraicas, potenciación y radicación. Consultado el 13 de Noviembre de 2020, de http://proyectos.javerianacali.edu.co/cursos_virtuales/pregrado/matematicas_fundamentale

[4] Álgebra; generalidades II. 2020. Expresiones Algebraicas. Consultado el 13 de Noviembre de 2020, de https://sites.google.com/site/algebrageneralidadesii/expresiones-algebraicas